Els mòduls de probabilitat i estadística del MMACA

Enric Brasó (MMACA)

Tot i que els conceptes i les eines d'aquesta branca de les matemàtiques són dels més utilitzats directament en la nostra vida quotidiana, la seva presència en els museus de matemàtiques és escassa.

Un treball, a parer nostre, reeixit, ha estat l'exposició «Big Bang Data» que es va veure al CCCB l'any 2014 i en què l'aparell tecnològic darrere dels mòduls era molt important.

Al MMACA, amb unes possibilitats més modestes, hem construït — i en aquest article us els presentem— uns quants mòduls en què intentem sorprendre i fer reflexionar sobre alguns aspectes d'aquest tema d'una manera simple i manipulativa.

Les pedres o l'extracció de mostres

La proposta d'aquest mòdul consisteix a extraure i pesar una mostra de 10 pedres entre una població de 100 còdols de diferents mides.

Observem que, en els diversos intents que fan els visitants, les pedres més visibles queden normalment sobrerepresentades i l'estimació del pes mitjà queda, en la majoria dels visitants, per sobre del real.

A partir d'aquesta constatació és interessant la reflexió sobre la necessitat d'un procediment aleatori, lliure de qualsevol subjectivitat, per tal d'aconseguir que la mostra sigui representativa.

Figura 1. El mòdul de les pedres o l'extracció de mostres.

L'atzar no és regular

Prèviament a explicar en què consisteix aquest mòdul, us proposem un experiment.

Demaneu a algú que ompli dues files de 20 caselles de la manera següent:

*Una s'ha d'omplir amb zeros i uns segons el resultat del llançament **imaginari** d'una moneda. L'altre s'ha d'omplir segons el resultat de 20 llançaments reals.*

*No us ha de dir quina és la seqüència **real** i quina és la imaginada.*

Si no és que estem molt «contaminats» per la nostra formació matemàtica, ens és difícil posar cara després de 3 o més cares. Així que, a la seqüència, difícilment hi trobarem 4 o més dígits iguals seguits. Compareu, però, amb la figura 2:

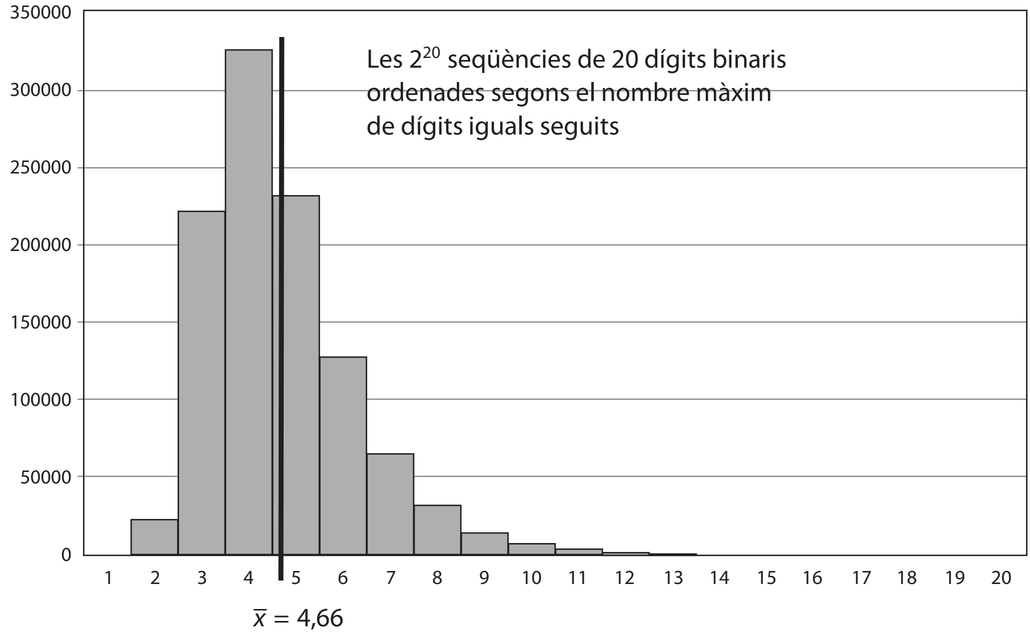

Figura 2. La distribució de les 2^{20} seqüències segons el màxim de dígits iguals seguits.

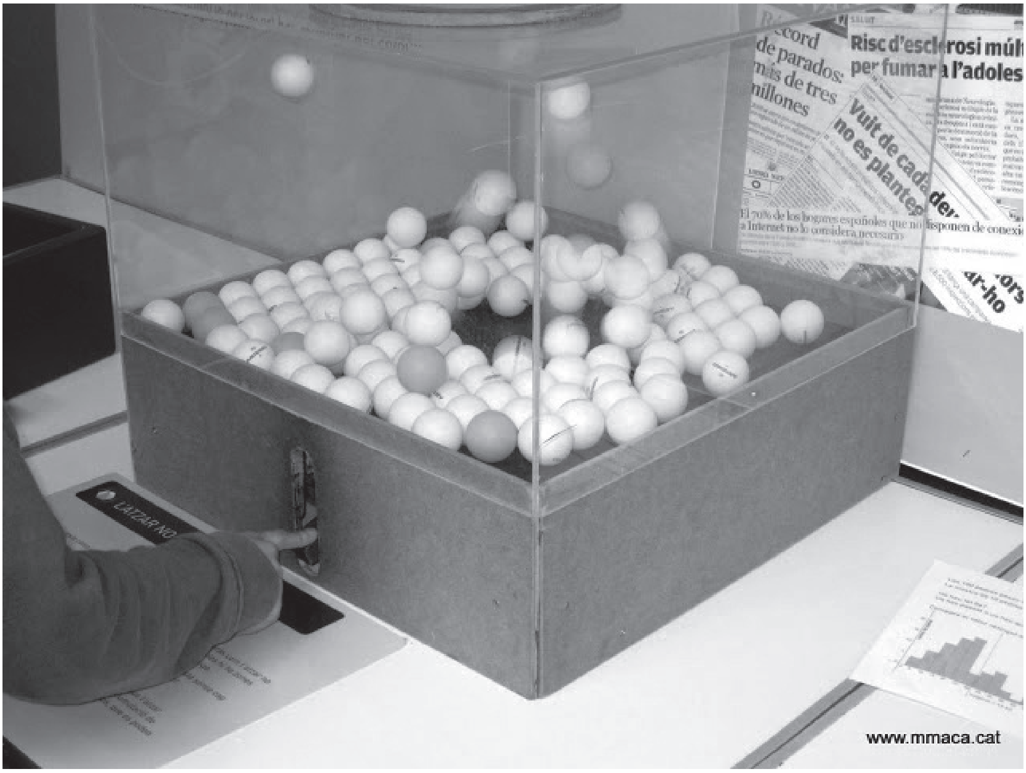

Figura 3. Les pilotes de ping-pong del mòdul «L'atzar no és regular».

De les 1.048.576 (2^{20}) possibles seqüències, un 77% contenen 4 o més dígits iguals seguits.

Tendim a repartir mentalment la successió de cares i creus amb més regularitat del que ho fa l'atzar.

El mòdul del MMACA reprodueix una situació similar amb dues dimensions. Dins una caixa transparent hi ha 120 boles de ping-pong 6 de les quals són taronges i la resta blanques.

Un senzill mecanisme permet fer-les saltar per tal d'anar variant la seva col·locació aleatòria. S'observa que sempre apareixen agrupacions i zones buides. Si demanéssim la col·locació aleatòria de les boles d'una manera manual, ho faríem més regularment.

La no-afectació d'alguns barris als bombardeigs de Londres a la Segona Guerra Mundial o l'acumulació de determinades malalties en un entorn són casos en què es busca una explicació casual quan poden ser explicats simplement pel comportament de l'atzar.

Daus intransitius

Considerem el llançament de dos daus especials en què guanya qui obté la puntuació més alta. Conegudes les característiques dels daus, és senzill calcular les probabilitats i, per tant, establir «el dau guanyador». Sorprenentment, aquesta relació no és transitiva.

Es coneixen diferents exemples d'aquest fet amb daus cúbics (2). En aquest mòdul, però, hem anat a buscar una situació al més simple possible, i l'hem trobat amb els tres daus tetraèdrics 4-4-4-1, 5-5-2-2 i 3-3-3-6.

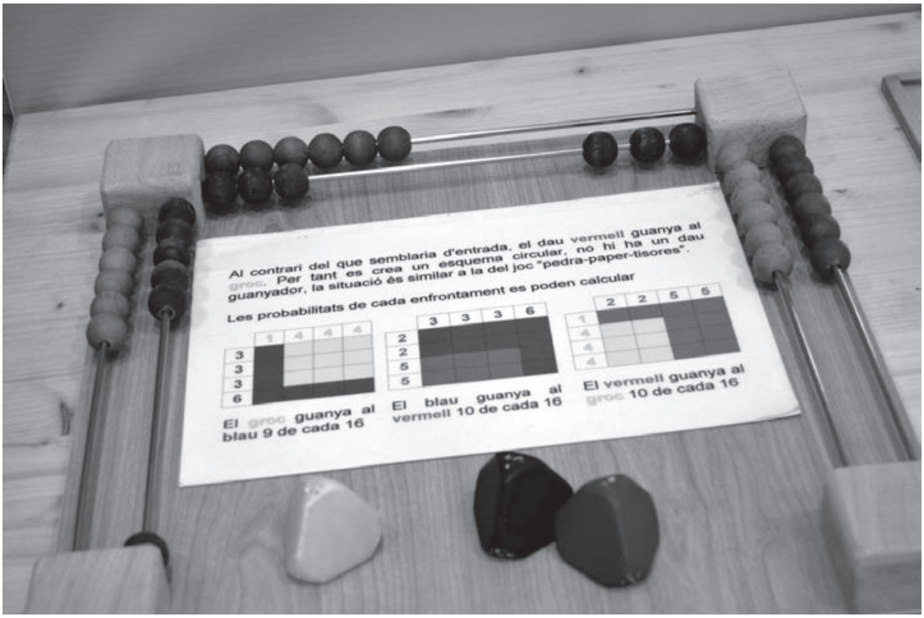

Figura 4. Els daus intransitius.

És fàcil comprovar que el dau guanyador en cada una de les tres confrontacions és diferent. Però la suma de les cares de cada dau és 13, 14 i 15, així que tenim una forma alternativa clara d'establir una relació d'ordre. És possible modificar la puntuació per tal que la suma de les puntuacions de les 4 cares sigui la mateixa? Ho deixem obert per si voleu entretenir-vos.

El bombo, les mostres i els intervals de confiança

Aquest mòdul consisteix en un cilindre giratori transparent que conté aproximadament 2.500 boletes de dos colors. Una peça posada al llarg permet recollir, a cada gir, una mostra de 50 boletes. Així, la mostra es pot repetir i acumular fàcilment.

Resulta clar per al públic que el percentatge de boles de color de la mostra no té per què coincidir amb el percentatge de la població. Una peça lliscant mostra els intervals de confiança i com es redueixen a mesura que augmenta la mida de la mostra.

El concepte d'interval de confiança no s'explica fins als cursos d'estadística de nivell universitari. Així, ens trobem que aquesta eina matemàtica d'ús generalitzat és òbviament molt mal entesa.

Amb aquest bombo al davant no és gens complicat comprovar i entendre que la repetició d'extraccions de mostres segueix unes pautes. Conèixer aquestes pautes ens permet quantificar la probabilitat que el resultat mostral estigui lluny del valor de la població.

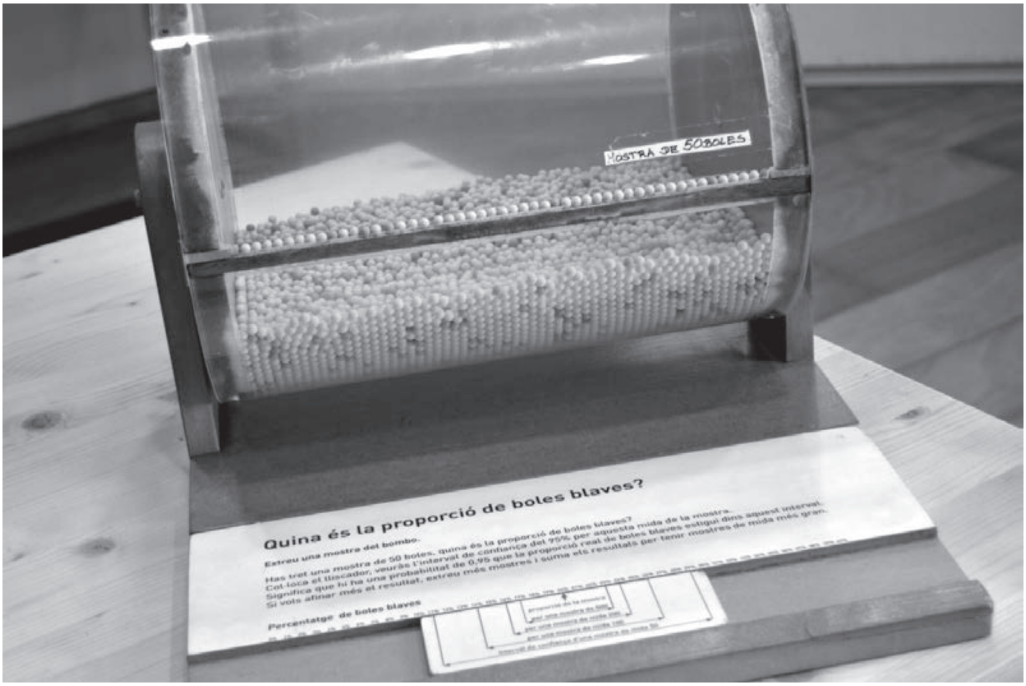

Figura 5. El bombo i el lliscador amb els intervals de confiança.

De fet, aquest mòdul només és una manera de visualitzar inicialment el concepte. Amb un senzill full de càlcul (3) es pot simular fàcilment l'extracció de centenars de mostres i amb els resultats marcar empíricament els límits dels intervals de confiança.

Creiem, doncs, que l'argument de la dificultat de l'aparell teòric no justifica la no-inclusió d'aquest tema al currículum de secundària.

Les coincidències

Aquest mòdul és una plasmació del conegut problema (o paradoxa) de l'aniversari:

En qualsevol reunió de més de 50 persones, la probabilitat que n'hi hagi dues que celebrin l'aniversari el mateix dia és pràcticament 1.

Més exactament, les probabilitats són:

Persones	20	30	40	50	60
Probabilitat que hi hagi una parella nascuda el mateix dia de l'any	41%	71%	89%	97%	99%

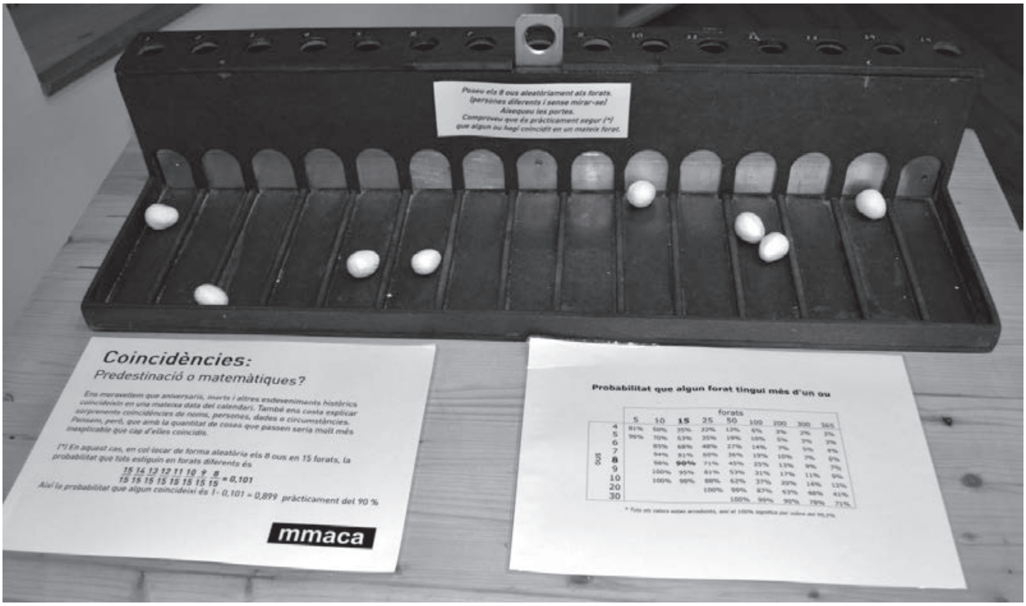

Figura 6. Mòdul de les coincidències.

A l'aparell que tenim al MMACA, invitem 8 visitants a agafar, cadascun d'ells, un ou i, sense haver vist on han col·locat els ous els anteriors participants, posar-lo en un dels 15 forats del mòdul. Un cop fet, s'aixequen les portes dels 15 forats i es pot comprovar si hi ha hagut coincidències.

Hem convertit, per tant, els dies en forats i les persones en ous (uep!) buscant una combinació dels dos valors en la qual el resultat sigui prou contundent — aquí el 90%— i els valors prou petits per a un objecte manipulable.

Com heu vist, amb els nostres mòduls, intentem presentar d'una manera plàstica aspectes propers a la realitat quotidiana i tangible, aspectes que potser s'ignoren en una formació acadèmica en què es prioritzi l'aspecte formal.

Per acabar, reiterem a tothom l'oferta de col·laboració per portar a la pràctica idees de possibles nous materials.

Bibliografia

Blastland, M. i Dilnot, A. (2009). *El tigre que no està* (p. 51-68). Madrid: Turner.

Gardner, M. (1985). *Ruedas, vida y otras diversiones matemáticas* (p. 44-54). Barcelona: Labor.

MMACA. El bombo i l'extracció de mostres. http://www.mmaca.cat/images/mmaca/moduls/bombo_mostres [Consultat el set. 2015]