Les cúpules de Leonardo da Vinci

Enric Brasó

Introducció

En aquest article presentem el material didàctic Leonardome, que consisteix en un conjunt de peces que, utilitzant el principi de l'encavalcament mutu, permeten aixecar les cúpules de Leonardo. Leonardome es presenta en diferents formats: en el format més gran, les cúpules són estructures de 4 a 5 m de diàmetre i aproximadament 1 m d'altura, que un grup de 25 persones pot construir en 20 minuts. La col·locació de les peces pot seguir patrons geomètrics de més o menys complexitat.

En el treball volem explicar els orígens d'aquesta idea, el seu interès didàctic, el desenvolupament del taller de construcció i els detalls del disseny que provoquen la deformació dels patrons plans i la seva curvatura. Finalment, estudiem diferents aspectes d'aquestes particulars tessel·lacions i en concret demostrem que n'existeixen infinites.

L'origen

Figura 1. Pont autosostenible. Full 71 del *Codex Atlanticus* de Leonardo da Vinci.

Fa més de cinc-cents anys el genial Leonardo da Vinci va fer aquest dibuix d'un pont auto-sostenible (figura 1). Els bastons que formen el pont s'encavalquen mútuament, de manera que se sostenen sense cap element de subjecció i permeten abastar així una distància molt més llarga que la mida individual de cadascun d'ells.

Desconeixem si la idea del pont va ser portada a la pràctica en temps de Leonardo da Vinci, però d'ençà de la moderna revalorització dels seus quaderns d'apunts, aquest pont ha estat un element present a les exposicions i els museus de ciència d'arreu del món.

El pont de Leonardo disposa els bastons en una sola direcció per cobrir la distància entre dos punts. És natural estendre la idea de l'encavalcament mutu a dues direccions per cobrir així una superfície (figura 2).

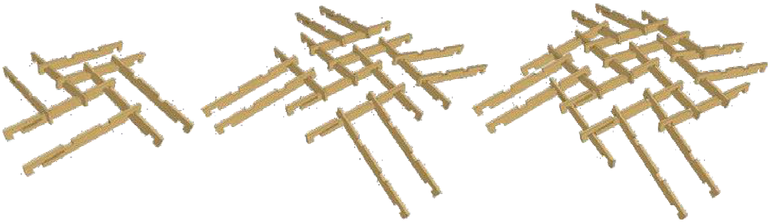

Figura 2. Primers passos de la construcció d'una cúpula encavalcant bastons en dues direccions.

L'escultor contemporani holandès Rinus Roelofs (figura 3), reconegut per les seves obres d'inspiració geomètrica, fou el primer a adonar-se, i investigar, aquesta idea.[1] Rinus, cercant en l'obra de Leonardo da Vinci, va trobar uns esbossos d'enreixats de bastons en dues direccions (figura 4). L'obra de Rinus Roelofs aprofundeix en les possibilitats artístiques i geomètriques d'aquestes estructures, que permeten crear múltiples variacions i derivacions.

Figura 3. L'escultor Rinus Roelofs.

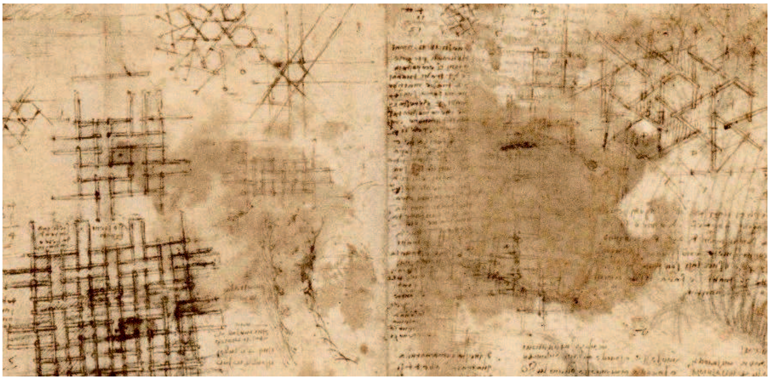

Figura 4. Full 889 del *Codex Atlanticus* de Leonardo da Vinci amb els esbossos de l'encavalcament en dues direccions.

1. www.rinusroelofs.nl/structure/basic-grids/davinci-131.html.

Al Museu de Matemàtiques, on tenim des dels nostres inicis el pont de Leonardo, ens vam adonar també de la possibilitat d'estendre la idea de l'encavalcament mutu a dues direccions. Hem treballat, investigat i dissenyat diferents simulacions i prototips centrades en l'aspecte didàctic. És interessant comprovar que la nostra investigació ha convergit, pel que fa a la forma i les dimensions, amb la recerca de Rinus Roelofs centrada en l'aspecte artístic.

Tot i que d'entrada vam penjar el nostre disseny dels pals a la xarxa,[2] ha estat amb la producció i comercialització dels kits didàctics Leonardome que hem aconseguit la difusió del recurs.

Els bastons de 50 cm Leonardome es presenten en una caixa de 250 peces que inclou una guia didàctica (figura 5). A més, a la web www.leonardome.com es proposen activitats i tallers i s'ofereix suport personalitzat.

Figura 5. El kit didàctic Leonardome.

Estem preparant també la comercialització en caixes de 50 peces, més manejables i econòmiques. Aquesta quantitat de peces és suficient per construir petites cúpules de forma autònoma i és un material idoni per a les escoles que vulguin organitzar un racó o ambient de geometria.

A més d'aquests bastons grans, al Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA) hem dissenyat i produït peces petites de 15 cm que permeten construir cúpules de sobretaula (figura 6). Acompanyem tot aquest material amb propostes didàctiques com les descrites en aquest article.

Figura 6. Les caixes amb les peces de 15 cm de fusta i de plàstic, amb curvatura i sense.

2. www.mmaca.cat.

Comencem a construir

El MMACA ofereix, al Palau Mercader de Cornellà, el taller de construcció de cúpules de Leonardo per a les escoles que ens visiten i els diumenges per a les famílies. També l'organitzem a les exposicions temporals, a les escoles, als centres i a les fires que ens ho demanen.

El taller és una activitat sorprenent que adaptem a totes les edats, des de grups escolars amb nens i nenes de cinc anys fins a universitaris i públic familiar. En uns 20 minuts, un grup d'unes 20 persones aconsegueix aixecar una cúpula d'aproximadament 1 m d'altura i 4-5 m de diàmetre.

A l'inici de l'activitat escollim el patró que seguirem d'entre els 11 que es proposen (figura 7). Són suficients poques instruccions per iniciar la construcció. L'experiència ens porta a començar normalment per un dels tres primers patrons amb els bastons en dues direccions perpendiculars. Els participants es troben de sobte amb un treball mental inusual: han de decidir, de forma repetida, el lloc i la manera de col·locar cada peça imaginant-se com el patró bidimensional segueix a partir del que ja està construït i, a més a més, han de tenir en compte la col·locació per sobre o per sota dels encaixos. És instructiu fer verbalitzar aquests raonaments, ja que es posen de manifest les múltiples maneres de visualitzar l'estructura i com cadascú es fixa en aspectes diferents per anar col·locant i encaixant els bastons.

L'aparició immediata del resultat, l'estructura que creix i s'eleva, és un estímul col·lectiu de gran valor. És imprescindible fer-la créixer de manera uniforme i coordinada per tot el seu perímetre; per tant, és una oportunitat per potenciar la cooperació i el suport mutu. La cúpula, un cop construïda, es percep com el resultat del treball del grup.

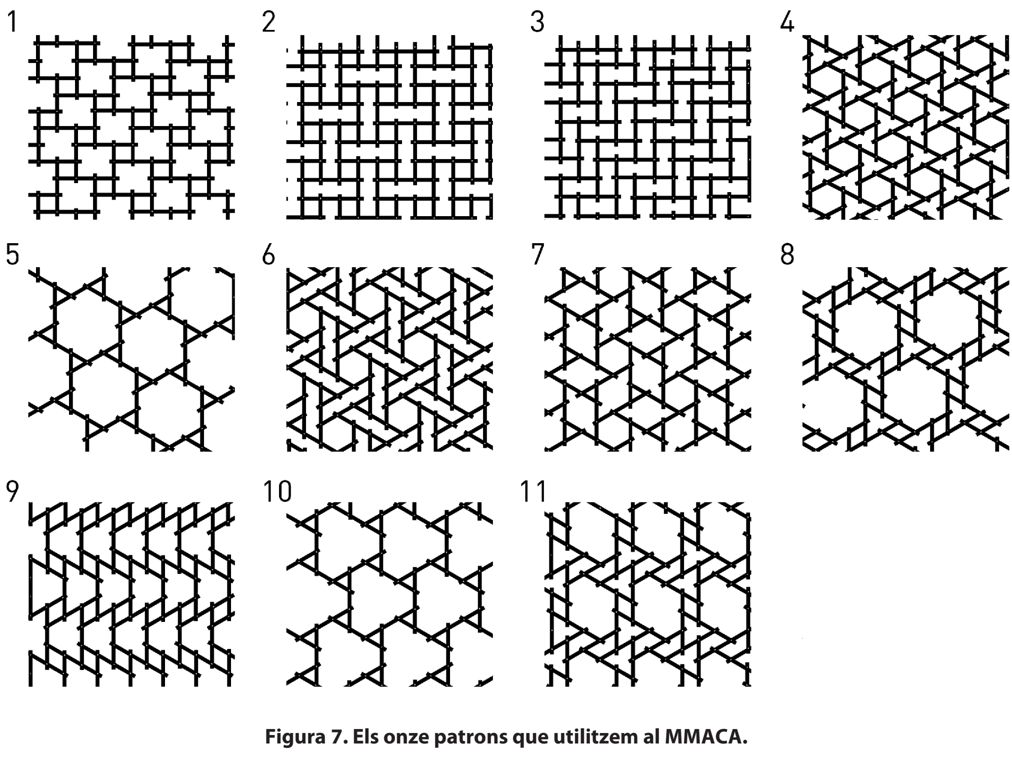

Figura 7. Els onze patrons que utilitzem al MMACA.

Un cop feta la cúpula, són possibles diferents activitats. Òbviament, els petits es deleixen per entrar-hi. Els grups de secundària i els adults, l'aixequen coordinadament entre tots per veure-la des de sota. Un cop aixecada, es pot fer rodar o moure i es pot comprovar com la seva flexibilitat li confereix resistència als terratrèmols.

Hem sentit dir moltes vegades a la Maria Antònia Canals que l'aprenentatge geomètric s'ha d'acompanyar amb la manipulació i amb la vivència motriu. Les cúpules permeten satisfer una de les seves recomanacions: viure els polígons i les figures geomètriques des de dins.

El moment de la caiguda és el punt àlgid del taller. En fallar un punt de suport, les peces cauen com si es tractés d'un castell de cartes.

D'on prové la curvatura?

Una part important del taller és el moment per a la reflexió, les preguntes i la discussió. Apareixen qüestions sobre Leonardo, la gènesi de la idea o l'aplicació real d'aquestes cúpules en arquitectura. Per a nosaltres són especialment interessants les qüestions geomètriques:

- En lloc d'aturar la construcció, es podria continuar posant peces fins a completar una esfera?
- Si els patrons són enrajolats plans, per què s'aixequen les cúpules?

La resposta es pot descobrir mirant amb atenció el disseny dels bastons i constatant que el fons de les quatre osques no és al mateix nivell (figura 8). Aquesta diferència provoca la deformació de l'estructura plana.

Figura 8. El disseny de la peça de 50 × 5 cm.

La curvatura de les cúpules és determinada per aquesta diferència de nivells. Si les osques estiguessin alineades, obtindríem una estructura plana. El nostre disseny[3] està ajustat per tal d'aconseguir cúpules prou grans per encabir un grup de vint-i-cinc nens.

Per fer possible la curvatura de l'estructura plana cal que tingui flexibilitat, i això ho dona l'amplitud dels encaixos. L'estructura deformada està lluny de ser un poliedre: de la mateixa manera que les rajoles se separen quan les arrels d'un arbre bomben un enrajolat, a les cúpules els vèrtexs dels polígons adjacents no coincideixen i els polígons deixen de tenir els seus elements dins d'un sol pla. L'amplitud dels encaixos i el tipus de patró donen el límit de creixement de les cúpules. Els qui han construït cúpules s'adonen que, a mesura que la cúpula creix, la posició inclinada de les peces fa que la gravetat no treballi tan eficaçment.

3. Es pot descarregar amb llicència Creative Commons lliure a www.mmaca.cat/les-cupules-de-leonardo.

Amb aquests patrons, doncs, les cúpules no poden créixer indefinidament. Rinus Roelofs ha treballat en diferents direccions, una de les quals és la recerca de patrons polièdrics construïbles amb bastons de Leonardo. En teniu un exemple en l'esfera que està sostenint a la seva fotografia (figura 3).

Al MMACA hem preparat i oferim una versió dels bastons de Leonardo de 15 cm en què les osques estan alineades i, per tant, no creen curvatura (figura 9). Amb aquests bastons, en lloc de cúpules, es creen enreixats plans que poden créixer indefinidament. Són una bona eina per investigar sobre els diferents patrons i les seves característiques.

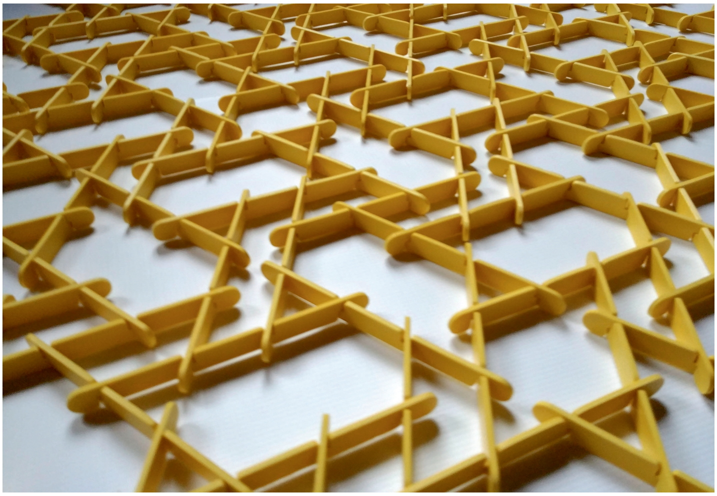

Figura 9. L'enreixat d'un nou patró fet amb les peces que no generen curvatura.

Les tessel·lacions de Leonardo

Els patrons amb què aixequem les cúpules són deformacions d'enrajolats o tessel·lacions planes. A continuació tractarem algunes de les seves característiques sense tenir en compte aquesta deformació.

Formalment podem definir una tessel·lació de Leonardo com l'enrajolat del pla format per segments iguals, amb quatre punts de contacte mutu, els dos extrems amb polaritat positiva i els dos punts que el divideixen en tres parts iguals amb polaritat negativa i de manera que tots els punts de contacte quedin aparellats positiu amb negatiu (figura 10).

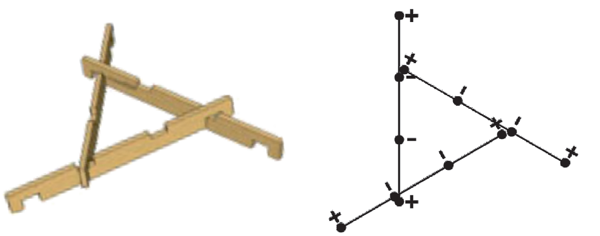

Figura 10. Formalització de les peces com a segments amb quatre punts de contacte + - - +.

Els onze patrons de la figura 7 són tessel·lacions de Leonardo, però no són pas les úniques, ja que les figures 9, 11 i 15 ens en mostren algunes més.

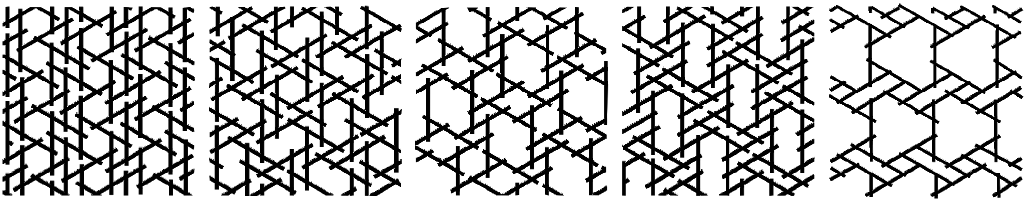

Figura 11. Altres patrons o tessel·lacions de Leonardo.

Es poden distingir dos grups de tessel·lacions de Leonardo: les deformables i les rígides.

El grup de les tessel·lacions de Leonardo deformables

Les tessel·lacions 1, 2 i 3 de la figura 7 tenen la particularitat que estan formades exclusivament per paral·lelograms, els seus bastons estan orientats sols en dues direccions i l'angle entre aquestes direccions és variable, com mostra la figura 12.

Precisament aquesta és una de les activitats interessants del taller de construcció. Una vegada construïda i aixecada una cúpula d'un d'aquests tres patrons, es poden identificar les direccions de les diagonals; llavors les persones diametralment oposades a aquestes direccions es poden acostar i allunyar alternativament i es pot comprovar com es deforma l'estructura. Aquesta deformació no és possible amb els altres patrons, ja que contenen triangles o altres polígons. És una manera pràctica de veure i entendre aquesta característica dels paral·lelograms de múltiples aplicacions.

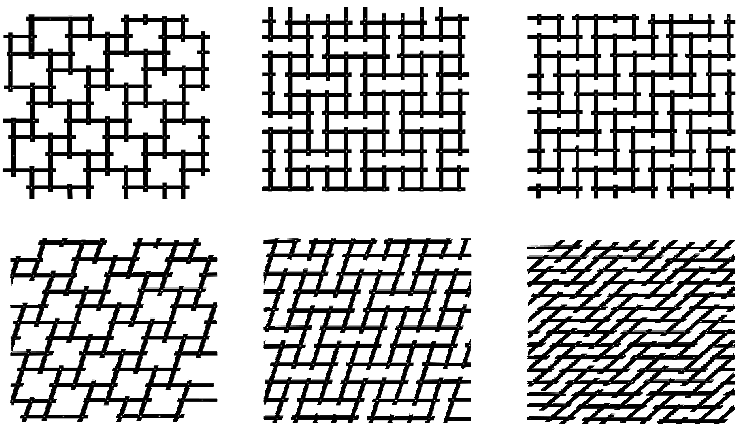

Figura 12. Els patrons o tessel·lacions de Leonardo 1, 2 i 3 mostrant que l'angle entre les direccions dels seus segments pot ser diferent de 90°.

A l'inici de la construcció de la cúpula del patró 1 ens podem adonar que hi ha dues maneres de fer el quadrat gran, les estructures resultants no es poden enllaçar. Existeixen, doncs, dues tessel·lacions de quadrats grans i petits que són simètriques: 1a i 1b (figura 13).

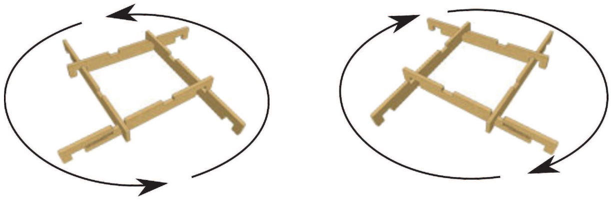

Figura 13. Dues maneres simètriques d'iniciar la cúpula del patró 1.

La tessel·lació 2, en canvi, és simètrica respecte a ella mateixa, mentre que la tessel·lació 3 torna a tenir dues versions simètriques: 3a i 3b. Aquestes cinc tessel·lacions són les úniques amb angles variables.

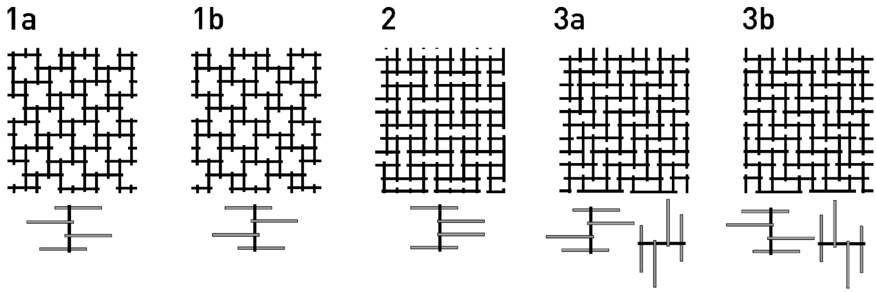

Figura 14. Les cinc tessel·lacions de Leonardo deformables i les configuracions corresponents.

És instructiu també fixar-se en com estan situades les quatre peces en contacte amb una peça determinada. Són les configuracions que es mostren a la part inferior de la figura 14.

El grup de tessel·lacions de Leonardo amb angles fixats

Totes les altres tessel·lacions tenen com a característica que els angles entre segments són sempre de 60° o de 120°. Podem considerar-les dibuixades sobre una trama isomètrica.[4]

D'aquestes tessel·lacions destaquen per la seva simplicitat les que tenen tots els bastons amb la mateixa configuració. Són les mostrades a la figura 15.

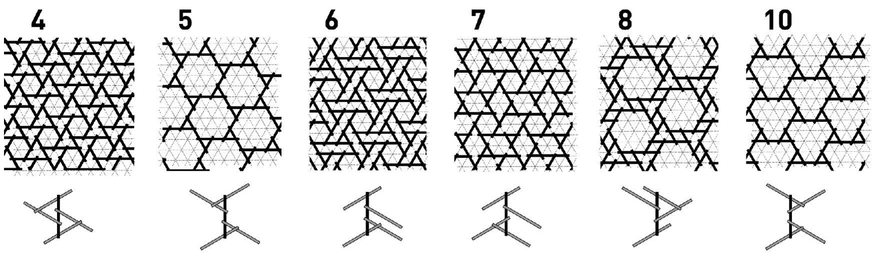

Figura 15. Els patrons amb angles fixats i configuració de bastons en contacte única.

4. També anomenada graella axonomètrica, la qual està formada per triangles equilàters iguals i s'utilitza en dibuix tècnic.

Excepte el patró 10, els altres no tenen simetria axial i, per tant, hem de considerar també la seva versió especular.

El nombre de tessel·lacions de Leonardo és infinit. És la conseqüència d'haver trobat la sèrie infinita que mostra la figura 16, que està construïda a partir del patró 8, format per hexàgons envoltats d'una sanefa de triangles i rombes, que es pot generalitzar envoltant dos, tres, quatre... hexàgons per una sanefa de triangles i rombes.

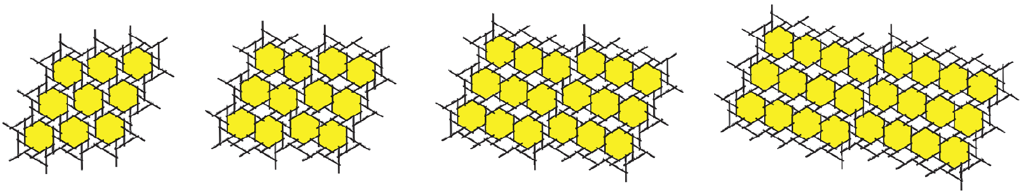

Figura 16. Els quatre primers patrons d'una sèrie infinita de patrons.

A més, els diferents patrons es poden enllaçar entre ells (figura 17).

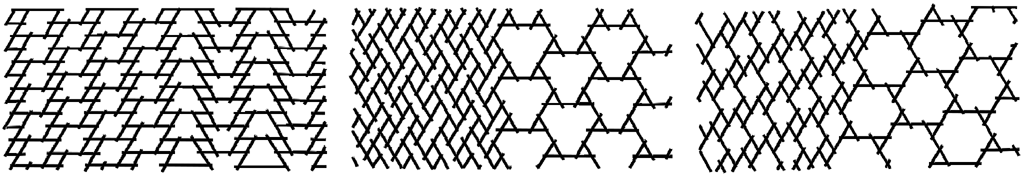

Figura 17. Alguns patrons enllaçats.

Aquestes tessel·lacions mixtes sols tenen translacions en una direcció. No es poden considerar regulars perquè no tenen una rajola fonamental que els reprodueixi amb translacions en dues direccions.

Els polígons convexos de Leonardo

Un exercici possible és el consistent a construir o dibuixar sobre una trama isomètrica tots els polígons convexos realitzables amb els bastons de Leonardo. No és una tasca simple perquè és fàcil d'ometre'n algun, atès que n'hi ha vint.

Cercant tessel·lacions de Leonardo que utilitzin aquests polígons hem descobert nous patrons, com els mostrats a les figures 9 i 11.

Treballant empíricament hem aconseguit crear patrons amb tots els vint polígons de la figura 18 excepte amb el trapezi de costats 1, 2, 1, 3, assenyalat amb un asterisc (*) i per al qual no hem trobat cap tessel·lació que l'utilitzés.

Un dels reptes pendents d'aconseguir és la demostració formal d'aquesta i altres qüestions referents a aquestes tessel·lacions.

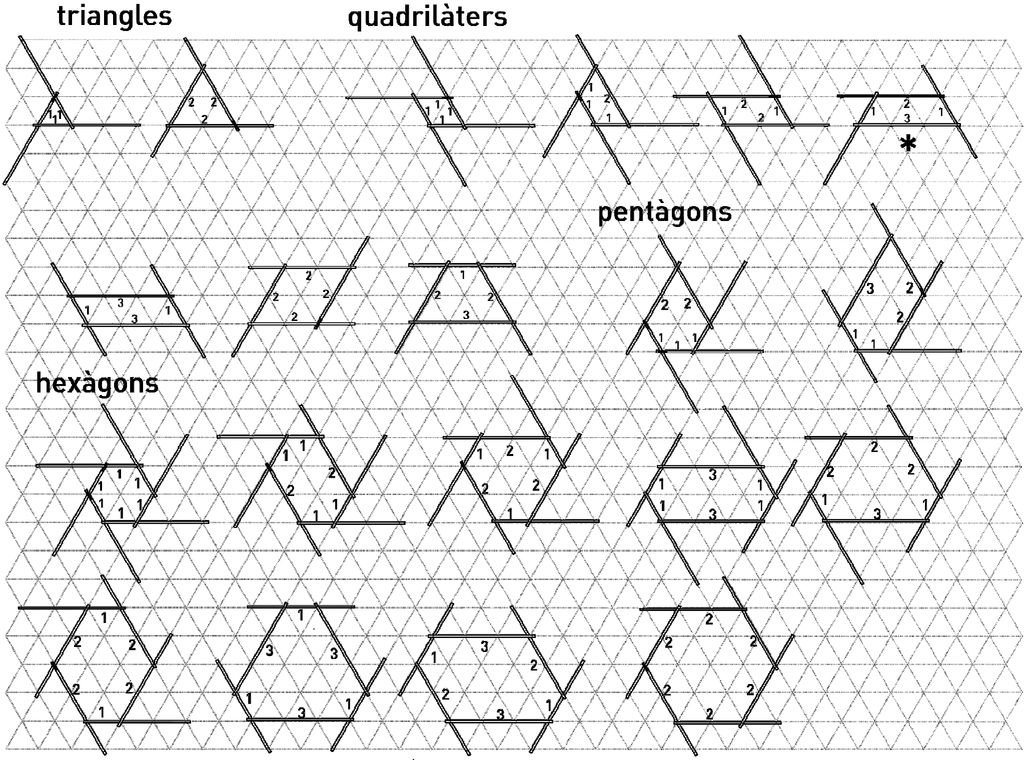

Figura 18. Els vint polígons convexos construïbles amb bastons de Leonardo.

La densitat de les tessel·lacions de Leonardo

Una qüestió que apareix comparant els onze patrons que utilitzem és la diferent separació entre les peces. Per quantificar aquesta idea, es pot definir el concepte de densitat com els bastons per unitat de superfície.

Per calcular la densitat convé trobar la rajola fonamental de cada tessel·lació a partir de les translacions mínimes en dues direccions de cada patró. Dividint la suma dels bastons inclosos en la rajola fonamental per la seva superfície (mesurada utilitzant com a unitat el quadrat que té de costat el bastó) s'obtenen els resultats de la figura 19.

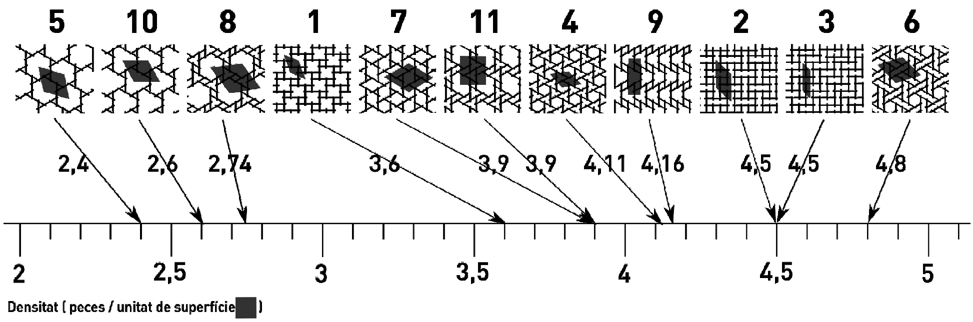

Figura 19. Els onze patrons utilitzats pel MMACA ordenats segons la seva densitat.
Es mostra també la rajola fonamental de cadascun.

Conclusions

Leonardome és un material polifacètic en molts sentits:

- Pel que fa als destinataris: des dels petits de cinc anys fins a universitaris i públic familiar.
- Pel que fa al format: taller de construcció amb cues-centes cinquanta peces grans, espai de racons amb cinquanta peces grans i tallers d'aula amb peces de sobretaula amb curvatura i sense.
- Pel que fa a la transversalitat de continguts i competències, no sols es treballen aspectes geomètrics i d'educació en valors, sinó que també es dona entrada a la història, l'art i la tecnologia.

Agraïm als educadors del MMACA i a tots els qui han treballat amb aquest material l'enriquiment que han significat les seves idees, formes de presentació i noves activitats. Estem segurs que seguirem recollint aportacions, ja que la proposta ha rebut una acollida impressionant per part de tots els col·lectius.

L'equilibri entre els aspectes lúdics i didàctic i les reflexions i els diàlegs que Leonardome provoca, confirmen el seu caràcter competencial i el seu indiscutible valor pedagògic.

Referències

Canals, M. Antònia (2009). *Documents de treball de Maria Antònia Canals.* Torrent (València): Federació Espanyola de Societats de Professors de Matemàtiques.

Da Vinci, Leonardo (1475-1519). *Codice Atlantico*. Disponible en línia a la Biblioteca Leonardiana: http://www.leonardodigitale.com (consulta: 30-5-2018).

Popovic, Olga (2008). *Reciprocal Frame Architecture.* Londres: Architectural Press.

Roefols, Rinus (2003). Leonardo da Vinci's Bar Grids. A: *Meeting Alhambra, ISAMA-BRIDGES Conference Proceedings*. Granada: Universidad de Granada, pàg. 229-234. Disponible en línia a: http://archive.bridgesmathart.org/2003/bridges2003-229.pdf (consulta: 30-5-2018).