suma+ 91
Secciones
Julio 2019
pp. 87-95

Sobre juegos y materiales didácticos

MMACA

La redacción de este artículo nos encuentra aún reflexionando sobre lo que la MATRIX Conference nos ha dejado: entusiasmo, dudas, errores, aciertos y, especialmente, experiencias y contactos. Aprovechando la invitación de los compañeros portugueses y la amistad de Fernando Blasco, hemos estado por primera vez en el VI Colloquium de Recreational Mathematics, la versión europea del Gathering for Gardner (figura 1).

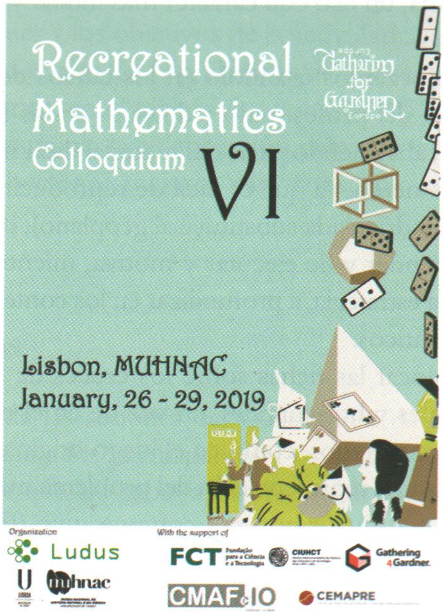


Figura 1. Póster Colloquium Lisboa

Del MMACA al aula

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en mayo de 2019

Si desde el MATRIX estábamos dándole vueltas a la relación entre educación y divulgación, se nos abría ahora otro espacio de análisis sobre juegos y actividades educativas lúdicas.

No dudamos que es necesario hacer dialogar entre ellos estos ámbitos en que hace tiempo que nos encontramos navegando, pero cada vez tenemos más claro que se necesita respetar las diferencias existentes y las peculiaridades de cada experiencia. Podemos tender miles de puentes y cruzarlos cada vez que nos plazca o no convenga, sabiendo en todo caso dónde nos colocamos y asumiendo compromisos y complicidades. Aun cuando todo cachorro ha aprendido a hacer de perro jugando, el objetivo del juego es divertirse y el de las actividades educativas, por lúdicas que sean, es aprender.

Figura 2. Tablero y piezas originales del Vieka

Vierka, geoplano y juego del Hip

El Vierka original es un juego de tablero de origen alemán (autor: Karel Wenzel) en el que de 2 a 4 concursantes han de colocar sus fichas para conseguir cubrir los vértices de un cuadrado (de lado mínimo 2 unidades). Gana el primero que lo consigue.

Nos parecía una oportunidad para dar al geoplano, material de reconocido valor didáctico, tanto para el alumnado de primaria como de secundaria, un uso con carácter más lúdico y competitivo.

Empezamos usándolo en los cursos de formación del profesorado y después en las ferias, para acabar siendo parte del material de la maleta de geometría, ya que es fácil de reproducir (una hoja cuadriculada substituye al geoplano), rápido de entender y de ejecutar y motiva, mientras se afina la estrategia, a profundizar en los contenidos matemáticos.

Colocar las fichas sobre los cruces de líneas verticales y horizontales, en vez de en el medio de los cuadrados, como en el juego original, nos parecía una representación del problema más potente, con mejor impacto comunicativo (figuras 2 y 3).

En cualquiera de las dos versiones, en las primeras fases del juego, los concursantes prueban a hacer cuadrados más o menos grandes, pero siempre paralelos a los ejes del tablero, mientras intentan impedir que el adversario haga lo propio.

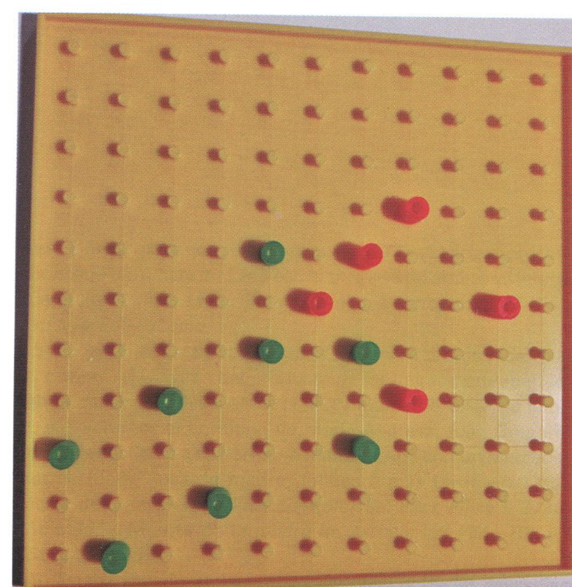


Figura 3. Situaciones del Vierka: hay posiciones ganadoras tanto del concursante rojo como del verde

Para los usuarios más jóvenes, el juego se limita a eso, pero, para los que tienen mayor conocimiento, la estrategia evoluciona hacia otras distribuciones, en las que el cuadrado no se apoya en la base, sino que gira formando ángulos que al principio son de 45º (configuración roja) y después asumen más inclinaciones (configuración verde, en la parte inferior derecha de la imagen).

En el primer caso estamos intentando romper con una iconografía habitual del cuadrado y el rombo, invitando a definirlos correctamente, en base a sus ángulos (y, a lo mejor, a sus diagonales) y no a su apariencia.

En el segundo caso, especialmente si el cuadrado es grande y el ángulo respecto a los ejes es pequeño, no resulta inmediato comprobar que la figura formada sea realmente un cuadrado. Es necesario expresar en un modo preciso el valor de los ángulos y que los lados sean perpendiculares.

Entra en juego la pendiente de la recta, o sea la relación entre el incremento de la ordenada y el incremento de la abscisa de la recta. Constatar que las rectas paralelas tienen la misma pendiente y las perpendiculares una pendiente inversa y opuesta llega más tarde, pero siempre en forma de descubrimiento y, por lo tanto, con mayor probabilidad de ser entendido y consolidado.

No hay duda de que, para que sea así, los sucesivos descubrimientos van definidos, comunicados y discutidos con el resto del grupo o de la clase, de manera que, una vez más, es necesaria una sinergia con la acción didáctica «formal» y el papel del docente, de estímulo, mediación, sistematización…, sigue siendo insustituible.

Preparando materiales para el Colloquium, descubrimos una propuesta de Martin Gardner, aparentemente muy parecida y llamada *The game of Hip*[1].

Nos encontramos otra vez con un tablero (normalmente de 6×6) y dos jugadores, con 18 fichas cada uno, que deben poner en el centro de las celdas con el objetivo de *obligar al adversario a ocupar los vértices de un cuadrado cualquiera*.

Se le ha dado la vuelta al objetivo y, evidentemente, a la estrategia.

Como en casi todo lo que proponía Martin Gardner desde sus páginas en el *Scientific American*, lo más interesante son las aportaciones de los lectores[2].

Dado su uso lúdico, las reflexiones no se centran sobre los contenidos matemáticos que antes

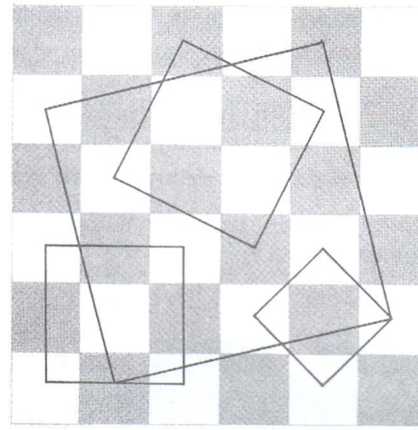


Figura 4. Martin Gardner: *The game of Hip*

tratamos, aun cuando esos evidentemente siguen existiendo, sino sobre la cantidad de variantes posibles del juego y la mejor estrategia para ganar o por lo menos empatar, modificando en parte las reglas (por ejemplo, el tamaño del tablero).

Puede que en el juego no haya menos matemáticas que en el uso didáctico de este material, pero sí diferentes, de manera que su uso en el aula no quita las ganas de ir trabajando más a fondo otros aspectos de la propuesta.

Una característica común es en todo caso que la modalidad competitiva puede resultar motivadora y facilitar la toma de contacto con el material, pero las reflexiones más interesantes se hacen de forma colaborativa, buscando los límites de toda propuesta, cambiando las reglas y/o las condiciones y los objetivos de la actividad…

En el caso del Hip, el hecho de que sea posible construir, en el tablero 6×6, hasta 105 cuadrados, estimula la colaboración para encontrar las distribuciones mejores para conseguir ganar o empatar[3].

Cajas

Una de las sesiones del Colloquium de Lisboa invitaba a los participantes a compartir un problema que les había apasionado. Nosotros presentamos un famoso problema de optimización, que consiste en encontrar la caja de volumen máximo que se puede construir doblando los bordes de una hoja cuadrada de papel.

En función de la edad de nuestro alumnado, podemos usar diferentes estrategias:

1. Podemos construir cajas diferentes con cartulina o plástico algo rígido, llenarlas de arroz y, a través de un cilindro graduado o una balanza, determinar el volumen de la caja (figura 5).

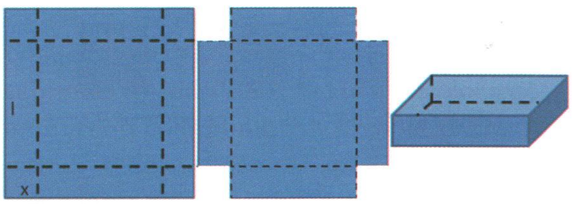
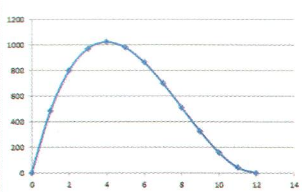


Figura 5. Proceso de construcción de la caja

2. Simular el problema con una hoja de cálculo e investigar los volúmenes, focalizando cada vez más el intervalo de valores de x más interesantes (figura 6).

l	x=h	lbase	Sbase	Vol
24	0	24	576	0
24	1	22	484	484
24	2	20	400	800
24	3	18	324	972
24	4	16	256	1024
24	5	14	196	980
24	6	12	144	864
24	7	10	100	700
24	8	8	64	512
24	9	6	36	324
24	10	4	16	160
24	11	2	4	44
24	12	0	0	0



24	3	18	324	972
24	3,2	17,6	309,8	991
24	3,4	17,2	295,8	1006
24	3,6	16,8	282,2	1016
24	3,8	16,4	269	1022
24	4	16	256	1024
24	4,2	15,6	243,4	1022
24	4,4	15,2	231	1017
24	4,6	14,8	219	1008
24	4,8	14,4	207,4	995
24	5	14	196	980

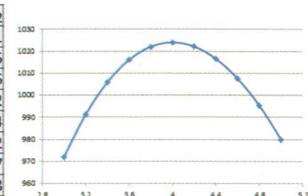


Figura 6. Tablas y gráficos de la simulación con hoja de cálculo

3. Usando el álgebra, con L = lado de la hoja:

$$h = x;\ Sb = (L-2x)^2$$
$$V = (L-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4Lx^2 + L^2x$$

Derivando y resolviendo la ecuación:

$$V' = 12x^2 - 8Lx + L^2 = 0,$$

así que V'=0 para:

$$x = L/2 \text{ (no hay base) y } x = L/6.$$

El resultado es igual en los tres casos, obviamente, pero resulta «rara» esta ratio (1/6) entre x y L, complicada de imaginar las razones «prácticas» que soporten esta verdad matemáticamente inapelable, o sea, que es el doble de conveniente «invertir» en la base que no en la altura de la caja, como resulta también en el famoso dialogo de los cilindros de Galileo[4].

Desde el punto de vista geométrico, nuestra caja resulta ser la cuarta parte de un cubo. Difícil no entusiasmarse (figura 7).

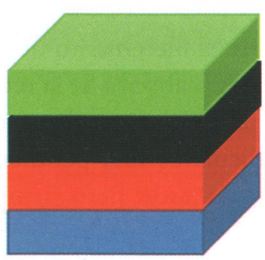


Figura 7. Composición de cajas de volumen máximo: el cubo

Unos días después, nos llegó esta demostración de Zé Paulo Viana[5], un nuevo gran amigo del MMACA, válida para todos los polígonos regulares (figuras 8 y 9).

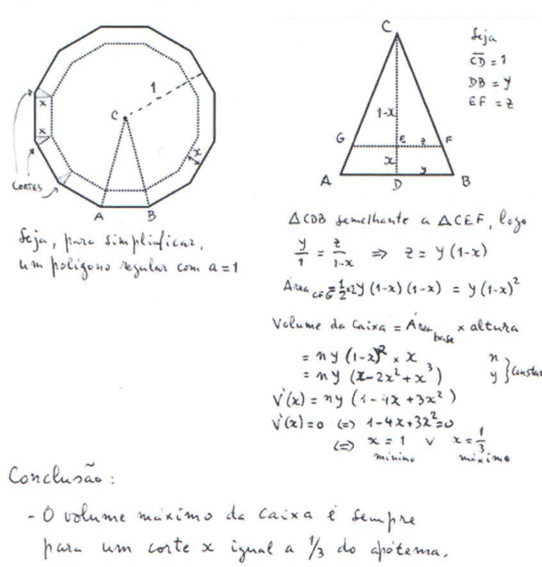


Figura 8. La demostración de Zé Paulo Viana para cajas poligonales

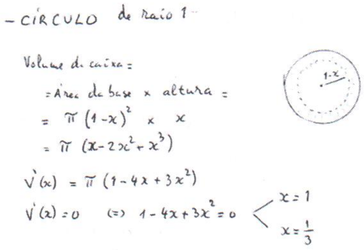


Figura 9. Extensión al círculo

O sea, en todos los polígonos regulares, la caja de volumen máximo corresponde a un borde que es 1/3 de la apotema del polígono.

Sin ser una «revelación», es un paso que nos deja un poco menos inquietos y con un nuevo, extraordinario amigo. ¡Obrigados, Zé Paulo!

El mail de Zé Paulo nos estimuló a investigar más opciones para trabajar este tema y una posibilidad que se nos abría era la de diseñar una simulación con GeoGebra, sobre la base de dos variables: el número de lados del polígono (es decir: la forma de la hoja de papel) y, obviamente, el lado del corte de la esquina (es decir, la altura del poliedro), y la apotema como constante (= 1) (figura 10).

Dado que la simulación se ha hecho manteniendo constante el valor de la apotema en todos los polígonos, parece normal que el volumen de los sólidos resultantes sea diferente.

Si volviéramos a colocarnos en la situación inicial, o sea, doblando y cortando hojas de papel de diferente forma, ¿cómo variaría el volumen de los sólidos obtenidos si estas hojas tuvieran igual superficie?

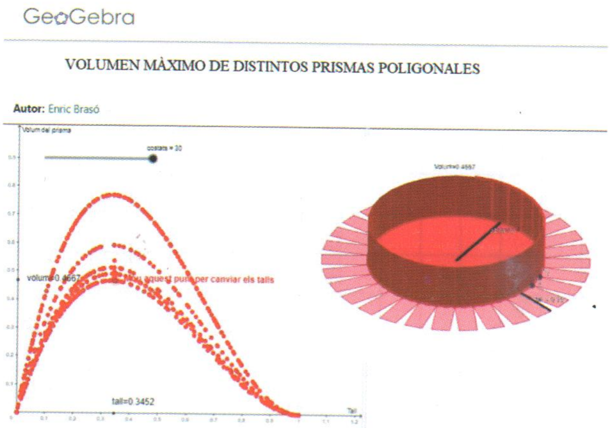


Figura 10. Simulación del problema de las cajas con GeoGebra

Como siempre: un buen problema genera más preguntas que respuestas y nuevas investigaciones.

Monedas

Otra cosa que pasó en Lisboa fue una serie desordenada de encuentros informales, al margen de las actividades oficiales. Que sea en un pasillo o en la mesa del desayuno, el tiempo se hace elástico y se llena de ideas desordenadas y útiles, ligeras, pero nunca fútiles, un torbellino de desafíos que esta vez giró alrededor de juegos con monedas.

El clásico

Es un reto que se encuentra en muchas publicaciones de acertijos matemáticos y que Edward De Bono utiliza como ejemplo de *Lateral Thinking*[6] (figura 11).

Reglas: Desplazando el menor número de monedas (3), invertir el triángulo.

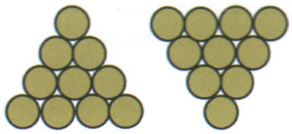


Figura 11. Situación inicial y situación final

Las monedas de M. Gardner 1[7]

Reglas: La moneda que se desliza no debe disturbar las otras monedas y debe ser colocada siempre de manera que toque otras dos monedas.

Desplazando el menor número de monedas (4), pasar del triángulo al hexágono.

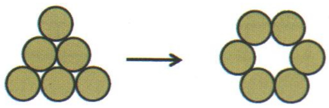


Figura 12. Situación inicial y situación final

Variante Colin Wright

Reglas: La moneda que se desliza no debe disturbar las otras monedas y debe ser colocada siempre de manera que toque otras dos monedas.

Desplazando el menor número de monedas (4), pasar de la estructura de rombo a la lineal, que puede ser horizontal, vertical u oblicua.

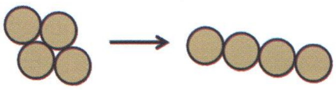


Figura 13. Situación inicial y situación final

Las monedas de H. Dudeney

Reglas: Se pueden deslizar 2 monedas adyacentes, iguales o diferentes, sin invertir su orden (figura 15).

El desafío es hacerlo con el menor número de movimientos (5).

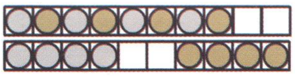


Figura 14. Situación inicial y situación final

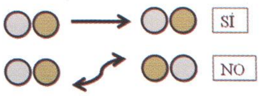


Figura 15. Deslizar 2 monedas sin invertir su orden

Las monedas de M. Gardner 2[8]

Reglas: Se pueden deslizar 2 monedas adyacentes, iguales o diferentes, sin invertir su orden.

El desafío es hacerlo con el menor número de movimientos (3).

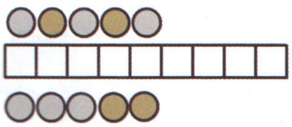


Figura 16. Situación inicial y situación final

Las monedas de M. Gardner 3

La misma situación que el juego anterior, con una variante fundamental en las reglas: *solo* se pueden deslizar 2 monedas adyacentes *diferentes*, sin invertir su orden.

El desafío sigue siendo hacerlo con el menor número de movimientos.

El cambio, aparentemente pequeño, de las reglas provoca un cambio importante de estrategia y la introducción de las monedas en el tablero juega un papel importante en el momento de consolidar la secuencia de movimientos (4).

Juegos de tablero

Puestos a mover monedas, vamos a proponer un par de símil-sudokus[9] que tienen un potencial didáctico interesante porque su construcción es suficientemente sencilla para poder realizar una actividad para un taller.

Sudoku de Monedas 1 (tipos de monedas)

Las monedas de los bordes indican cómo es la moneda más cercana que se debe colocar en el tablero. En cada fila y cada columna se puede colocar *solo una moneda de cada tipo.*

Por ejemplo, parece bastante evidente que en la esquina superior derecha irá una moneda de 1€ y en la esquina inferior derecha una de 50 céntimos.

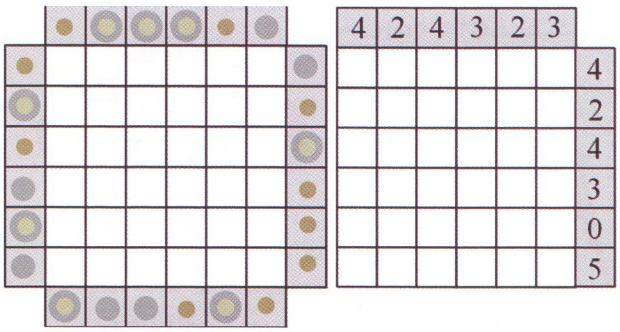


Figura 17. Juegos de tableros con monedas

Sudoku de monedas 2 (números de monedas en cada fila y columna)

En este caso se juega con un solo tipo de moneda y la variante es dónde se deben colocar.

Los números de los bordes indican cuántas monedas hay en la correspondiente fila o columna (figura 17).

El valor 0 en la penúltima fila es de gran ayuda.

Dejadnos reafirmar una vez más nuestra idea de que, en los talleres que proponemos desde el MMACA, la actividad principal es la *construcción* y no la resolución de los retos, aun cuando estos se puedan después ofrecer a los compañeros.

Se prestan también para proyectar la actividad educativa fuera del aula, en ferias escolares o de barrio, acentuando así el carácter competencial.

Además, estos materiales se pueden adaptar fácilmente a diferentes niveles de conocimiento y habilidades (reduciendo las dimensiones del tablero o poniendo alguna pista que oriente la solución).

Al mismo tiempo, se prestan a estimular la formulación de hipótesis. Por ejemplo:

Estos juegos, ¿tienen solución única?

¿Cuál es la característica fundamental que me puede orientar para responder a esa pregunta?

Si miramos los dos tableros, tienen las mismas dimensiones (36 celdas) y en los dos casos, la mitad será rellenada. A pesar de esto, nos atreveríamos a afirmar que en muchos de los retos que tienen el formato del segundo juego tendrán más de una solución válida. Por el contrario, creemos que muchos de los retos (¡quizás todos!) que tienen el formato del primer juego tendrán solución única.

La diferencia se debe a la cantidad (¿calidad?) de la información que estamos dando. En el primer reto estamos informando sobre la cantidad de monedas presentes (3 en cada fila y columna) y la calidad (una por tipo). Esto reduce notablemente las posibles alternativas.

Tienes Talento

Cambiando completamente de tema, nos gustaría compartir un proyecto en el que estuvimos trabajando hace un par de años y que es interesante especialmente por un aspecto que estuvo presente desde el inicio del proceso de elaboración: su proyección, desde el centro en que se elabora hacia la comunidad en la que viven los chicos y chicas involucrados.

La «Proyección» es uno de los indicadores SCAP (Significatividad, Comunicación, Acción, Proyección) que propone el Departament d'Educació de la Generalitat para evaluar el grado de competencialidad de la acción educativa.

El documento oficial especifica, respecto a este criterio:

CRITERIOS	INDICADORES
P Proyección ¿Le encuentro un sentido? ¿Me ayuda a entender y a relacionarme con mi entorno?	P1. El diseño de las actividades conecta al alumno/a con su entorno y busca la aplicación y difusión de producto final
	P2. La realización de las actividades requiere establecer relaciones con el mundo profesional y personal: trabajo, familia, amigos, artistas... P3. La secuencia de actividades proyecta el trabajo de cada alumno/a fuera del aula y se articula como un servicio a la comunidad (otras aulas, etapas educativas, centro, entorno, mundo...)
	P4. La secuencia comprende la difusión y comunicación a la comunidad: centro y entorno
	P5. Se evalúa la aplicación y calidad del producto

Figura 18. Los indicadores relativos al criterio «Proyección» del documento oficial del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya

Si las paredes de las aulas se han hecho más permeables, especialmente en los cursos de educación infantil y primaria, permitiendo fructuosos intercambios entre el alumnado de edades diferentes y acciones de *self-tutoring* y acogida, mucho más difícil es que las escuelas se abran al territorio y a prácticas educativas no-formales o informales.

Vamos por orden.

El proyecto «Tienes Talento» (Tens Talent) nace de los servicios educativos de la Fundació La Caixa y está dirigido a chicos/as de 6-12 años que viven en situaciones de riesgo de exclusión social. Las diferentes unidades se desarrollan en formato de laboratorio en 54 centros distribuidos por toda España, fuera del horario escolar y, más intensamente, en periodos no lectivos.

Los primeros talleres que se ofrecieron se orientaban en enseñar a resolver conflictos y se desarrollaban a través de acciones teatrales y psicodramas. Sucesivamente, se fueron introduciendo otros ámbitos (por ejemplo: robótica[18]), hasta llegar a las matemáticas y al MMACA.

En la primera fase de elaboración de los contenidos tuvimos la colaboración de David Barba y Laura Morera nos ayudó en la formación de los educadores, pero, cada vez que íbamos colocando una pieza del puzle para adaptarnos a la demanda (diferentes edades, unidades didácticas autónomas, duración de cada sesión 1 hora, diseño unitario, actividades no curriculares, dinámicas relacionales, formación de los educadores, etc.), nos íbamos alejando del proyecto original.

La cosa seguía representando un reto importante para nosotros y, por lo que parece, conseguimos conjuntar un producto atractivo (figura 19):

- Tema: el viaje de Marco Polo, de Venecia al Catai y vuelta a casa.
- 12 etapas y 3 oasis.
- Cada etapas ofrece 2 o 3 actividades con un contenido que intenta inspirarse —muy libremente— en la cultura matemática del sitio.
- Los oasis permiten recuperar, revisar, discutir, profundizar… las actividades de las etapas anteriores.

Cada etapa termina presentando un juego que se puede realizar fuera del centro (escuela, centros sociales, familias…) copiando la plantilla y usando los materiales de un kit (dados, fichas, tangram, naipes) que cada usuario ha recibido al empezar el taller.

Este último producto es justamente lo que nos interesa discutir y no tanto por sus contenidos: juego de la H, triángulos y cuadrados mágicos, cartas para adivinar un número, diferentes versiones del Nim, tangram, cuadrado greco-latino, Vierka, plantillas para la construcción de poliedros, Tximitxurri, dados de colores.

Es fácil ver que son actividades muy familiares para todo docente que haya trabajado con materiales.

El aspecto que nos parece innovador e interesante es su uso fuera del contexto que lo ha generado y su gestión por parte de los asistentes, transformados en divulgadores.

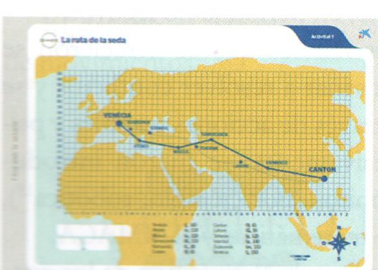
Creo que nosotros mismos no fuimos conscientes del valor de este aspecto del taller hasta que empezaron las reuniones de la Comunidad de Prácticas Escuela-Patrimonio, promovida por la Agencia del Patrimoni de la Generalitat a partir de unas jornadas sobre este tema. Algunas reflexiones teóricas y el análisis de buenas prácticas de cooperación entre centros escolares y museos impulsaron la creación de la CoP, formada por personal de los Servicios Educativos de Museos y Centros de Interpretación del Patrimonio y docentes de centros de primaria y secundaria.

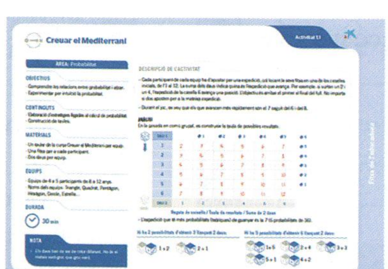
Nos dimos un año (que finalmente fueron dieciocho meses) para elaborar una guía[11] que permitiera medir el grado de competencialidad educativa de las actividades que nuestras instituciones proponen a los estudiantes que nos visitan.

Nos dio tiempo para pilotar la guía en alguna de nuestras instituciones y, de acuerdo con los comentarios recogidos, mejorar su claridad, eficacia, funcionalidad…

Para terminar, nos gustaría compartir dos reflexiones sobre los resultados del pilotaje de la guía:

- De los indicadores de la guía, los que menor puntuación consiguieron (señal de su escasa actuación) eran los que están en el ámbito del criterio «Proyección», a pesar de que se han puesto en marcha unas iniciativas[12] que





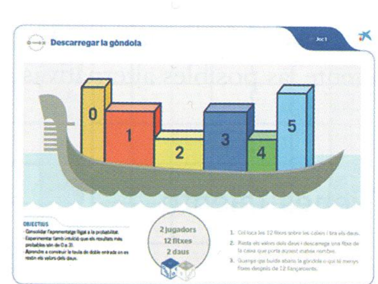


Figura 19. Ejemplo de los materiales del proyecto

recogen y fomentan la colaboración entre centros escolares y otras entidades (universidades, museos, fundaciones…) que comparten usuarios y territorio.

— Es interesante evidenciar que, aun cuando se detectaban defectos, por ejemplo en la definición de los indicadores, al mismo tiempo se manifestaba la riqueza del debate que habían provocado entre los operadores de los Servicios educativos de los Centros Patrimoniales, testimoniando así la necesidad de este tipo de producto.

De alguna manera, concuerda con nuestros criterios de evaluación de la oferta educativa del MMACA: lo más importante es la conversación que nace espontáneamente entre los usuarios. Para que se produzca esta conversación, es necesario un intenso trabajo para incrementar la vocación comunicativa de los módulos y las actividades que se proponen en la exposición, así como su capacidad de generar una investigación personal o colectiva una vez terminada la visita, para suscitar interés y vocaciones.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Gardner, M. (1994), *My Best Mathematical and Logical Puzzle*, Dover, 20-22

2 Gardner, M. (1972), *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Alianza, 171-172

3 Gardner, M. (1972), *Nuevos Pasatiempos Matemáticos*, Alianza, 180-182

4 Siempre nos encanta ver cómo, en las actividades colaborativas, empatar sea un éxito.

5 Ver <https://emmametodo.com/percorso-sui-solidi-galileo-due-contenitori-cilindrici/>.

6 <https://clube.spm.pt/news/1498>.

7 <https://es.wikipedia.org/wiki/Pensamiento_lateral>.

8 Gardner, M. (1994), *Collating the Coins, My best mathematical and logic puzzle*, Dover, 11-.

9 Gardner, M. (1994), *Collating the Coins, My best mathematical and logic puzzle*, Dover, 28-.

10 Como otras propuestas parecidas, su origen son las páginas de juegos de la edición veraniega de algún periódico.

11 ¡Nadie se escapa a la fascinación de la *fashion*!

12 <http://cultura.gencat.cat/web/.content/dgpc/museus/08.recursos/publicacions/quaderns/04_Guia-evaluar-diseno-actividades-educativas-patrimoniales.pdf>, versión castellana.

13 <https://www.fbofill.cat/magnet-aliances-lexit-educatiu>.

14 <https://www.fundaciocatalunya-lapedrera.com/es/home>.