Encaixant poliedres: diàleg sobre algunes variants del problema del príncep Rupert

Josep Rey, Manuel Udina

Els editors del *Nou Biaix* ens han encarregat una nova secció fixa de la revista, en la qual comentarem alguns dels mòduls de les exposicions del MMACA (Museu de les Matemàtiques de Catalunya). En aquesta ocasió volem parlar del mòdul «Encaixar poliedres» perquè, tot i que potser no és un dels que crida més l'atenció, ens ha permès trobar lligams amb altres qüestions d'interès. Tenir aquest material a l'abast de les mans ens fa aprendre i millorar la intuïció geomètrica.

La primera idea va ser partir d'un cub de fusta sense una de les cares i mirar d'encaixar-hi altres poliedres regulars, com més grans millor. Trobar quins són els més grans va ser per a nosaltres un repte, i l'estudi que n'hem hagut de fer ens il·lustra sobre algunes propietats del cub que potser no són gaire conegudes. A l'escrit li donem l'habitual forma de diàleg entre dues persones A i B.

Tetràedre

A. Comencem pel tetràedre.

B. El tetràedre té 4 cares que són triangles equilàters. D'entrada podríem preguntar-nos com podem posar (inscriure) un triangle equilàter, com més gran millor, dins del cub.

A. La dimensió més gran del cub és la diagonal interior, que uneix dos vèrtexs oposats. Ara bé, si féssim coincidir aquesta diagonal amb un costat del triangle, aquest sortiria fora del cub, seria massa gran (fig. 1).

B. A més, no passaria per la cara, ja que la dimensió màxima de la cara és la seva diagonal, que és més petita.

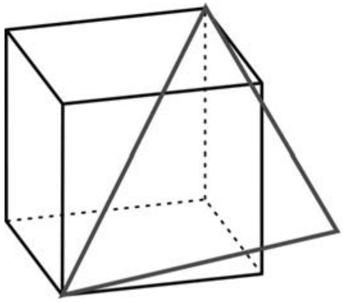

Figura 1

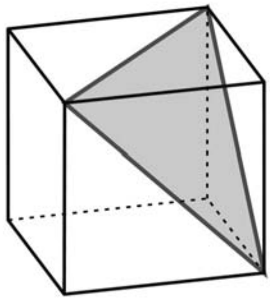

Figura 2

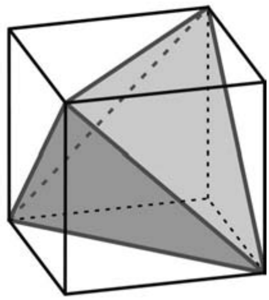

Figura 3

A. Podem començar, doncs, mirant si aquesta diagonal de la cara pot ser un costat del triangle que volem inscriure en el cub.

B. Efectivament, si una vegada dibuixada una d'aquestes diagonals d'una cara del cub ens fixem en un vèrtex d'aquesta cara que no estigui a la diagonal dibuixada, i donant la volta a aquest vèrtex completem un triangle amb les diagonals apropiades de les dues cares adjacents, obtindrem un triangle equilàter ben gran (fig. 2).

A. Sí, senyor! Es podria, ara, continuar construint el tetràedre?

B. Sí, sí, només cal unir cada un dels vèrtexs d'aquest triangle amb el vèrtex oposat a aquell al qual hem donat la volta. Fixa't que també anem seguint diagonals de cares del cub i, per tant, aquest tetràedre té totes les arestes iguals i conseqüentment les cares són triangles equilàters (fig. 3).

A. És d'interès fer notar que el volum d'aquest tetràedre és $1/3$ del volum del cub. La diagonal d'una cara del cub unitat val $\sqrt{2}$, l'altura del triangle equilàter seria $\sqrt{6}/2$, i per tant l'àrea de la cara del tetràedre serà:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'altura del tetràedre serà, doncs, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ i el volum d'aquest tetràedre màxim serà:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}.$$

B. I és curiós veure l'expressió de satisfacció del visitant quan aconsegueix encaixar el tetràedre en el cub. Moltes vegades ho estan intentant força estona, i fins que no fan coincidir l'aresta amb la diagonal sembla que no pugui entrar.

Octàedre. L'octàedre de Rupert

A. Estudiem ara l'octàedre.

B. Els punts mitjans de les cares del cub podrien ser els sis vèrtexs d'un octàedre regular, i quedaria ben encaixat en el cub. Aquest octàedre tindria una aresta meitat de l'aresta del tetràedre anterior, és a dir, $\sqrt{2}/2$, i tindria un volum igual a $1/6$ del cub.

A. Però ja es veu que és un octàedre massa petit. De fet, pot reposar sobre una cara sense tocar les altres. Segur que es poden trobar octàedres més grans inscrits en el cub.

B. Podríem intentar que siguin les arestes de l'octàedre i no solament els vèrtexs que se situïn en les cares del cub. Potser podríem fer coincidir alguna cara de l'octàedre amb una secció triangular del cub.

A. Si deixem reposar l'octàedre sobre una cara, el podem veure com un antiprisma (així com en un prisma recte les bases són dos polígons paral·lels i amb cares laterals rectangulars, en un antiprisma els polígons base estan girats un cert angle un en relació amb l'altre i les cares laterals són triangles). Atès que el cub té seccions que són triangles equilàters (generades per un pla perpendicular a una diagonal), una manera de veure una possible inserció de l'octàedre en el cub seria posar el cub verticalment segons una de les seves diagonals i que les dues cares horitzontals de l'octàedre coincideixin amb seccions triangulars regulars del cub (fig. 4 i 5).

B. De fet, com en el tetràedre, les tres arestes d'una cara de l'octàedre se situarien en una secció triangular com donant la volta a un vèrtex del cub.

A. I la cara oposada de l'octàedre es correspondria amb el vèrtex oposat del cub i una altra secció triangular del cub. Amb aquests dos triangles ja tindríem els sis vèrtexs de l'octàedre en sis de les arestes del cub (les que tenen un dels extrems en els vèrtexs superior i inferior) i les sis arestes horitzontals de l'octàedre en les sis cares del cub.

B. Ens proposem calcular, donat un cub d'aresta 1, quina seria l'alçada a què cal fer les dues seccions triangulars iguals i paral·leles perquè l'antiprisma resultant sigui un octàedre regular.

A. Considerem el cub amb una diagonal vertical. Amb dues seccions a igual distància dels vèrtexs superior i inferior obtenim dos triangles equilàters que es poden considerar com les cares superior i inferior d'un antiprisma (que també és un octàedre). Plantegem que qualsevol de les sis arestes que van d'una cara a l'altra fent com una ziga-zaga sigui igual que el costat del triangle secció per aconseguir que l'octàedre sigui regular.

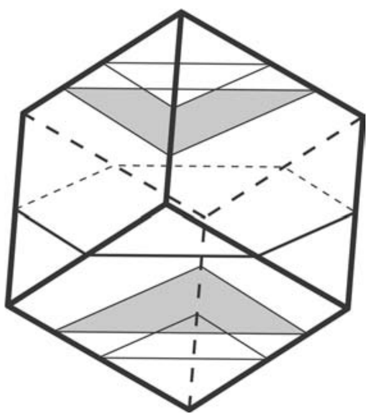

Figura 4

B. Ara utilitzarem coordenades. En una referència amb origen el vèrtex inferior del cub (d'aresta unitat) i els eixos coincidents amb les arestes que surten d'aquest vèrtex, que seria el (0,0,0) (el vèrtex superior seria el punt (1,1,1)), un triangle estaria format pels punts (t,0,0), (0,t,0) i (0,0,t) i l'altre pels punts ($1 - t$,1,1), ($1,1 - t$,1) i ($1,1,1 - t$). Posem la condició $d((t,0,0),(0,t,0)) = d((t,0,0), (1,1,1 - t))$; que porta a $2t^2 = 2(t\text{-}1)2 + 1$, i d'aquí $t = 3/4$, amb la qual cosa l'aresta de l'octàedre seria $3\sqrt{2}/4$, superior a la de l'octàedre de l'inici de la conversa.

A. Aquest resultat coincideix amb la solució del problema del príncep Rupert, i en dóna una solució més explicativa, perquè precisa quina és la direcció en què el cub mòbil hauria de travessar el fix (la direcció de la diagonal de l'octàedre encaixat) (fig. 6).

El problema del príncep Rupert

El príncep Rupert (1619-1682), comte del Rin, va apostar (i guanyar) que es podia fer passar un cub a través d'un forat fet en un altre cub d'iguals dimensions. El problema va ser resolt per Wallis suposant que la direcció en què el cub travessa el fix coincideix amb una de les diagonals del cub (i va determinar que la solució s'obtenia amb el cub que té per cara el quadrat màxim que es pot inscriure en l'hexàgon projecció del cub sobre un pla perpendicular a la diagonal. És un exercici veure que el costat d'aquest quadrat per al cub d'aresta 1 val $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ (aprox. 1,03).

Per extensió, el problema del príncep Rupert proposa trobar el cub més gran que podria «travessar» un cub de dimensions donades. Gairebé cent anys després de la solució de Wallis, Peter Nieuwland (1764-1794) va trobar un cub més gran que el de Wallis que compleix les condicions del problema, i el costat del qual és $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, que té un valor aproximat de 1,06. En aquest cas, la direcció en què aquest cub solució travessa el cub fix no és ben bé la d'una diagonal del cub, sinó la que correspon a una diagonal de l'octàedre més gran que es pot encaixar en el cub.

De fet, trobar el quadrat màxim inscriptible en el cub és un problema equivalent al del príncep Rupert. La demostració que el quadrat més gran és el del costat esmentat es pot fer amb alguns càlculs de geometria analítica, i es pot trobar en la web https://www.fme.upc.edu/arxius/el_full/fulls-antics/061/solucio_cub.pdf

B. Un cop construït aquest octàedre veiem que no és fàcil encaixar-lo dins el cub perquè costa trobar l'orientació amb què l'hem de col·locar. Però justament això és el que fa que el mòdul sigui més atractiu per al visitant.

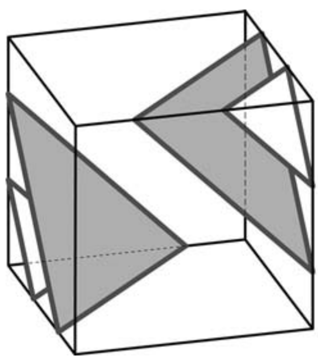

Figura 5

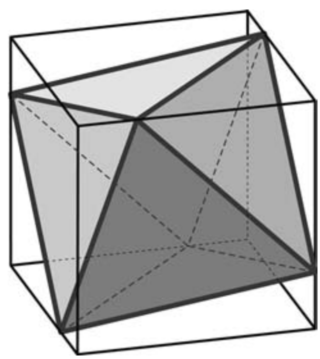

Figura 6

A. El fet que el valor de l'aresta de l'octàedre coincideixi amb el resultat del problema del príncep Rupert ens convenç que hem trobat l'octàedre de volum màxim inscriptible (o encaixable) en el cub perquè les arestes de l'octàedre formen tres quadrats inscrits en el cub, i per tant aquest octàedre l'anomenarem octàedre de Rupert.

B. Podem deixar com a exercici demostrar que el volum de l'octàedre de Rupert és una mica més gran que la meitat del volum del cub. (Podeu comprovar que el volum de l'octàedre de Rupert corresponent al cub unitat és $9/16$).

A. Doncs sí que hi hem guanyat des d'$1/6$, que és el volum del primer octàedre que havíem considerat! Fixem-nos en un altre aspecte remarcable de l'octàedre de Rupert encaixat: quan fem la secció del cub que forma un hexàgon regular (secció amb un pla que passa pel centre del cub i és perpendicular a la diagonal esmentada abans), l'octàedre també queda seccionat per un hexàgon regular concèntric amb el del cub (fig. 7 i 8).

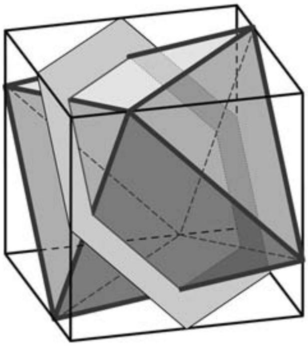

Figura 7

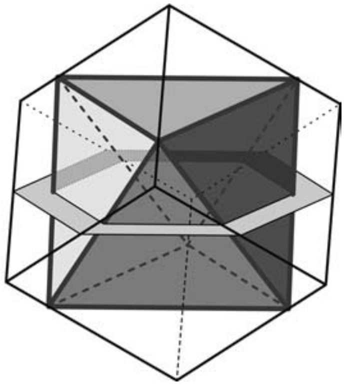

Figura 8

B. Ha quedat ben bonic. Hem aconseguit posar nom a un octàedre. Val la pena acabar de veure la relació del cub i de l'octàedre de Rupert amb alguns dibuixos comentats.

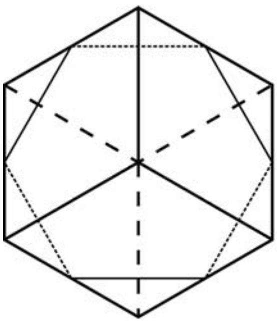

Figura 9

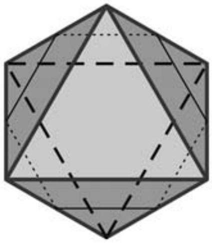

Figura 10

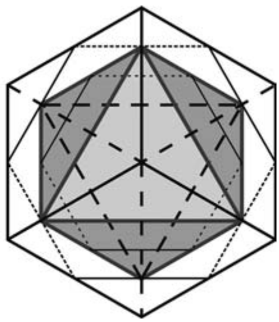

Figura 11

Descripció de les figures 9, 10 i 11

- *La figura 9 és la projecció del cub sobre un pla perpendicular a una diagonal que ens dóna l'hexàgon de costats gruixuts del dibuix. Hi ha dibuixat també l'hexàgon que uneix els punts mitjans de les arestes del primer hexàgon.*

- *La figura 10 és la projecció d'un octàedre sobre un pla d'una cara, que també és un hexàgon regular.*

- *La figura 11 mostra aquestes dues projeccions combinades quan tenim l'octàedre de Rupert encaixat en el cub. Es poden veure quatre hexàgons en progressió geomètrica, que es detallen a continuació:*

  L'hexàgon exterior dibuixat amb costats gruixuts és la projecció d'un cub en un pla perpendicular a una de les seves diagonals. El costat de l'hexàgon (per al cub unitat) seria $\frac{\sqrt{6}}{3}$. L'hexàgon que uneix els punts mitjans dels costats del primer hexàgon correspon a la projecció de la secció hexagonal del cub que uneix els punts mitjans de les arestes centrals. Com que aquest hexàgon és en un pla paral·lel al de la projecció, les mides dels costats d'aquest segon hexàgon són iguals a $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

  El tercer i el quart hexàgons corresponen als de la figura 10. El tercer uneix també els punts mitjans de l'hexàgon anterior i correspon a la projecció de l'octàedre de Rupert sobre el pla esmentat. Els dos triangles equilàters dibuixats unint vèrtexs alternatius d'aquest hexàgon corresponen a les projeccions de les cares horitzontals de l'octàedre, i la mida d'un dels costats d'aquests triangles (que és el valor de l'aresta de l'octàedre) és $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. Els costats d'aquest tercer hexàgon són la projecció de les arestes de la ziga-zaga de l'octàedre i mesuren $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$.

  Finalment, el quart hexàgon correspon a la secció de l'octàedre pels punts mitjans de les arestes de l'antiprisma. La mida d'un costat d'aquest hexàgon serà la meitat de l'aresta de l'octàedre, és a dir, $\frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}$. Hem obtingut quatre hexàgons en progressió geomètrica de raó $\frac{\sqrt{3}}{2}$ que ens han permès apreciar alguns detalls de l'octàedre de Rupert i de la seva inserció en el cub.

Dodecàedre i icosàedre

A. Ara estudiem el dodecàedre.

B. Sembla un cas més senzill, perquè és clar que un dodecàedre regular que compleixi que la distància entre arestes oposades sigui 1 té un encaix natural en el cub unitat que fa coincidir tres parells d'arestes paral·leles a les arestes del cub passant clarament pel punt mitjà de les cares del cub i no sembla que pugui ballar gaire, perquè està fixat en tres direccions (fig. 12).

A. Sí; si es col·loca en la direcció correcta queda ben encaixat, però s'observa que si se'l posa en una altra direcció sí que balla i, com abans, podem tornar a posar tant el cub com el dodecàedre verticalment sobre un vèrtex, amb la qual cosa hi ha sis arestes del dodecàedre que estan en dos plans paral·lels i horitzontals i permetria recolzar les tres arestes inferiors en les cares inferiors del cub, amb la qual cosa es veu clarament que el dodecàedre de distància entre arestes oposades 1 queda «petit».

B. Podem, doncs, fer créixer el dodecàedre de manera que també les arestes del pla superior toquin les cares superiors del cub i aleshores, com en el cas de l'octàedre de Rupert, es complirà que el pla que talla el cub en un hexàgon regular (paral·lelament a les seccions esmentades) també secciona el dodecàedre en un hexàgon regular concèntric amb l'anterior (fig. 13).

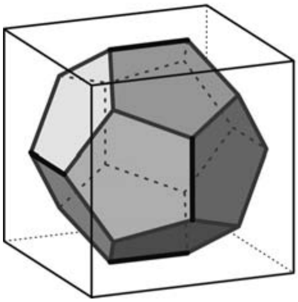

Figura 12

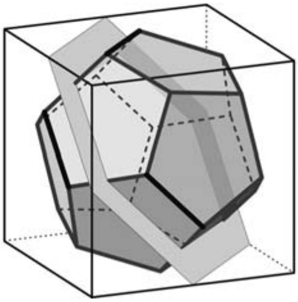

Figura 13

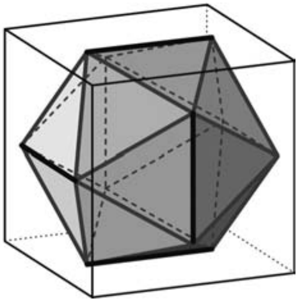

Figura 14

A. Potser seria exagerat anomenar aquest dodecàedre «de Rupert», però és més gran que l'anterior (les arestes d'aquest són un 3% més grans). Observem que les seccions horitzontals que contenen les arestes que toquen les cares del cub són també hexàgons, en aquest cas irregulars.

B. Aquesta forma d'encaixar el dodecàedre en el cub es pot descriure així: Quan posem el dodecàedre amb una diagonal vertical, queden tres cares a dalt i tres a baix. Els costats oposats al vèrtex superior (inferior) dels tres pentàgons que hi coincideixen queden en un pla horitzontal. Les sis arestes d'aquests pentàgons són les que tocaran les sis cares del cub (en dos plans paral·lels equidistants del centre del cub). Les altres sis cares del dodecàedre formen la franja central que quan se secciona pels punts mitjans de les arestes dóna la secció hexagonal que s'ha esmentat abans.

A. Ara seria llarg d'explicar, però aquesta configuració de sis arestes de l'octàedre també la trobem en un altre dels mòduls («vestir poliedres») de l'exposició. Podríem parlar-ne en una altra ocasió.

B. I per acabar, què podem dir de l'icosàedre?

A. La solució «natural» és l'única que hem considerat. Hem construït l'icosàedre amb distància entre arestes oposades 1, i hi ha tres parells d'arestes paral·lels als tres parells d'arestes del cub d'aresta 1, que se situaran passant pels punts mitjans de cada cara (fig. 14).

B. Doncs ho podem deixar aquí.