suma+
SECCIONES
Julio 2018
88
pp. 87-94



MMACA



# Del MMACA al aula

La segunda entrega desde el MMACA llega en plena efervescencia de la tercera edición de la Conferencia MATRIX, que organizaremos en Cornellá y Barcelona del 29 al 31 de octubre. El MMACA ha sido elegido para acompañar al MoMath (Museo Nacional de Matemáticas de Nueva York), coorganizador fijo, en la organización del encuentro, que se está consolidando como un evento significativo de colaboración entre las entidades volcadas en la difusión de las matemáticas.

Las anteriores ediciones (Dresden 2014 y Leeds 2016) han sentado las bases de la colaboración entre entidades y han constituido la plataforma de lanzamiento de varios proyectos internacionales, basados en contenidos que constituyen el corpus principal de esta sección de *Suma* dedicada al MMACA.

De hecho, algunos de los módulos expositivos y de los materiales para talleres que estamos presentando nacieron —o se pulieron— en el ámbito de los encuentros de MATRIX.

No hay duda que la conversación está en la base de la creación, la exploración, la mejora y la implementación de nuevos materiales.

Creemos que cada vez más se hace patente la necesidad de una colaboración más organizada (tanto en lo práctico como en la reflexión teórica)

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en abril de 2018

entre las instituciones de la educación reglada y no-reglada.

En general, nos gusta más la terminología derivada de la anglosajona, que habla de educación formal y no-formal, esencialmente porque facilita no olvidarnos de la tercera componente: la educación informal [1].

La educación no-formal contempla actividades educativas organizadas y útiles para una comunidad educativa identificada y con objetivos didácticos declarados [2]. Estamos convencidos de que muchas de las respuestas a los retos, no sé si nuevos, a los que se enfrenta la escuela (competencias, educación permanente, nuevas tecnologías, etc.) se pueden encontrar en esta colaboración, que es un paso determinante hacia la creación de la *comunidad educativa* que tanto nos ha gustado durante tanto tiempo (y a algunos de nosotros nos sigue gustando, todo sea dicho).

Cuando utilizamos la *ficha de evaluación competencial*, elaborada por la gente del CESIRE-CREAMAT, para testar los materiales de la exposición permanente del MMACA, los resultados fueron excelentes. Las actividades, que se proponen en la modalidad de taller no dirigido, donde los usuarios se mueven libremente y escogen los módulos que más les interesan, cumplen con los objetivos comunicativos, de accesibilidad, de respeto de las inteligencias múltiples, de elaboración personal de ideas, de autonomía y de resolución de problemas que conforman el aprendizaje competencial.

Así, en esta sección, seguimos proponiendo algunos de estos materiales, escogidos entre los que se pueden utilizar más fácilmente en clase.



## El juego de las fichas (Valores y forma)

Esta actividad, como la de los *Rascacielos* —que presentamos en la entrega anterior— se debe a la carencia de noticias en los veranos de los periódicos italianos.

En este caso también, nos pareció fácil e interesante sacar este material del papel y darle dimensiones, color y el tacto de la madera.

Inciso: en realidad, hemos realizado este módulo de muchas maneras, ya que lo cutre no nos espanta. La última versión es un formato gigante, con tablero de lona y piezas de colchoneta, que estamos estrenando en la exposición itinerante en La Bisbal, pero que es parte de un proyecto de *exposición horizontal* que estamos desarrollando para llevar la exposición en espacios no convencionales.

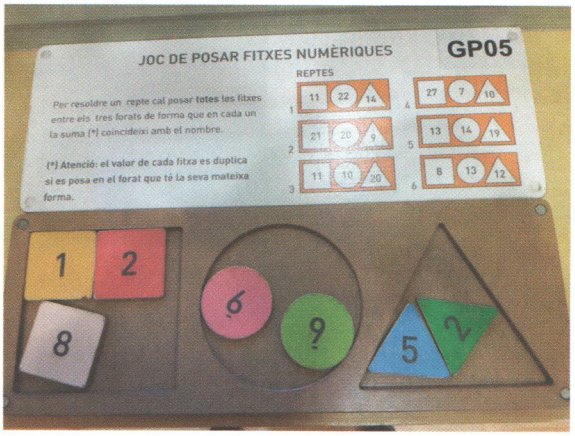


Figura 1. Juego de las fichas
(módulo exposición permanente del MMACA)

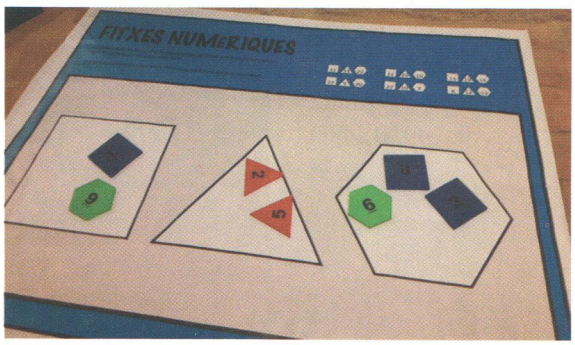


Figura 2. Juego de las fichas
(módulo exposición horizontal del MMACA)

La actividad siempre consiste en escoger uno de los retos y colocar las fichas en las cajas de diferente forma de manera que en cada caja las fichas sumen el valor indicado en el reto. La única regla es que si la ficha y la caja tienen la misma forma su valor se duplica, esto hace que la resolución (especialmente las primeras veces) no sea tan simple y que la actividad resulte aún más interesante [3].

Evidentemente, los conocimientos matemáticos requeridos son tan básicos que este material resulta muy accesible a todo tipo de público. Así que solo tuvimos que crear más retos para adaptar la propuesta al formato exposición[4]. A partir del reto que proponía el periódico, resultó muy simple modificar ligeramente las condiciones para encontrar nuevos retos. Por ejemplo:

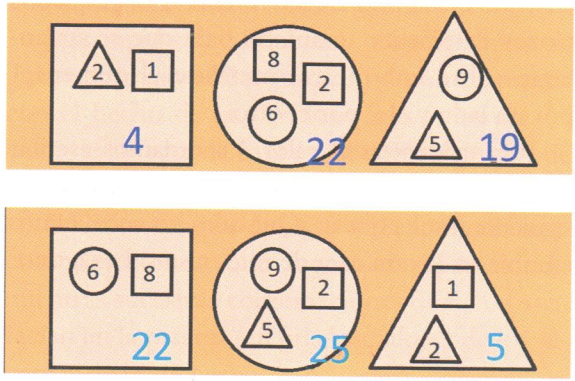


Figura 3. Retos del juego resueltos

En el momento en que decidimos que esta actividad era adecuada para los cursos de formación del profesorado tuvimos la necesidad de generar más retos.

Lo más sencillo parecía ser poner en cada caja unos números cualesquiera, con la condición de que la suma de los valores asignados a las tres cajas (que indicaremos con $\Sigma_{cajas}$) estuviera entre 33 y 66, ambos incluidos[5].

Todo funcionó hasta que apareció una ¡tríada imposible! Por ejemplo:

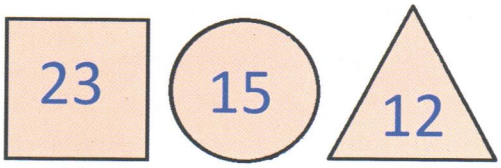


Figura 4. Reto sin solución

Toda crisis bien resuelta comporta un cambio importante de estrategia y un estudio más cauteloso de las variables en juego[6].

Así, una vez fijada la anterior condición de que $32 < \Sigma_{cajas} < 67$, empezamos a formularnos otras preguntas:

— ¿Todas las $\Sigma_{cajas}$ entre 33 y 66 son posibles?
— ¿Son soluciones únicas o hay más de una combinación de valores posibles?
— ¿Hay un algoritmo para contestar a estas preguntas sin necesidad de comprobar caso por caso?
— ¿Cuál es el mejor sistema para construir nuevos retos?
— ¿Sería sencillo, útil, interesante, productivo, etc., cambiar el valor o el número de las fichas?

Responder a estas preguntas, algunas sencillas y otras más complejas, nos llevó a distintas conclusiones y aplicaciones.

Por un lado parece bastante intuitivo que algunas de las $\Sigma_{cajas}$ tienen más de una solución (empezando por la $\Sigma_{cajas} = 33$), aunque parece también obvio que no todas las tendrán (por ejemplo $\Sigma_{cajas} = 66$).

Por otro lado, solo hay un modo de comprobar si todo valor intermedio entre 33 y 66 es una suma posible: ¡Hacer los 33 casos y algunas de sus variantes! Con paciencia («pa ciència, la nostra»[7]) y resignación, llegamos a la conclusión de que efectivamente todos los valores intermedios de la suma son solución de, por lo menos, un reto (algunos de más de dos). Aun así, en el momento de distribuir la suma entre las tres cajas, pueden aparecer retos imposibles, como hemos visto[8].

La imposibilidad de encontrar un algoritmo que nos permitiera llegar a conclusiones contrastadas sugiere que nos encontramos delante de un problema que requiere análisis combinatorio y un enfoque computacional[9]. Esto abre un interesante campo de discusión, reservado obviamente a las sesiones de formación del profesorado o con alumnos de final de la ESO o del Bachillerato. Está claro que las millonarias inversiones previstas para desarrollar calculadoras cuánticas no se gastarán para resolver este problema, pero podemos aprovechar este ejemplo tan sencillo para introducir el tema y proponer una actividad de *enriquecimiento*, tanto personal como de grupo, perfectamente coherente con nuestro planteamiento de desarrollo competencial.

Finalmente, este material se puede proponer en un taller que, como en el caso de los *Rascacielos*, tenga el objetivo de *construir la actividad*.

Así que otra vez, a cada pareja de alumnos[10] se les daba un tablero vacío, con las tres cajas de distinta forma y las fichas numeradas para que las pusieran a placer en las cajas. En este punto, tras explicar la sencilla regla de que al coincidir la forma de la caja y de la ficha el valor de esta se duplica, solo era necesario leer la suma del valor de la ficha en cada caja y escribirlo en su interior. Después de esto, se vaciaba el tablero y el reto estaba listo para ser pasado a otros compañeros.

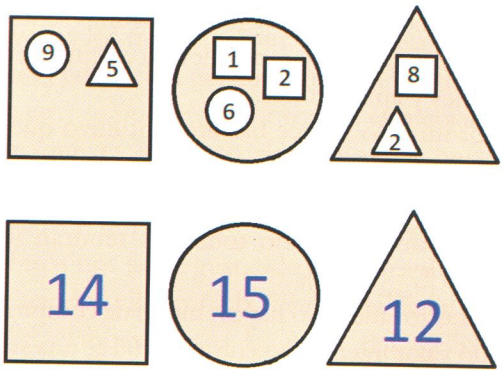


Figura 5. Construcción de un reto



Falta reflexionar sobre si puede ser interesante cambiar la cantidad o el valor de la fichas. Es evidente que se puede hacer y puede que merezca la pena experimentarlo pero, por otro lado, debemos tener cuidado de no aumentar demasiado el número de fichas o su valor: se desviaría la atención hacia el cálculo, cuando en realidad nos interesa que se centen en la estrategia y puedan ágilmente cambiar de hipótesis, es decir, de distribución de fichas.

Además, el juego entre las dos fichas que tienen el mismo valor (2) pero forma distinta y el 1, que puede doblar su valor y llega a sumar lo mismo, jugando con las cajas, que las dos anteriores fichas examinadas, es muy acertado y ofrece pequeñas variaciones difíciles de detectar.

David Barba y Cecilia Calvo citaron este juego en la sección número 85 de *Suma*[11], proponiendo además otra actividad, aparentemente más simple, sobre la misma idea de construir cantidades numéricas combinando valores más pequeños.

Como en varias ocasiones (y la lista de agradecimientos sería casi tan larga como la de las personas que en estos años han escrito en *Suma*) decidimos aprovechar la sugerencia y usar la actividad propuesta por Cecilia y David en un taller para alumnos de 4.º de Primaria, antes de introducir la del *Juego de las fichas*.

Interpretamos la actividad a nuestra manera, construyendo el material en el aula, con el alumnado, manteniendo las mismas reglas y llamando la actividad la *Máquina de sumar*.

Estuvimos asignando el valor a la primera ficha, un hexágono de PVC con dos pequeños trozos de plástico imantado para que se aguantaran sobre una pizarra metálica: el número 1 por un lado y el 2 por el otro.

Para evidenciar el valor 3 acordamos escribir esa cifra en una cara de otro hexágono. La pregunta siguiente resulta obvia: ¿Qué número necesitamos escribir en la otra cara de este mismo hexágono?

**Actividad 2**

Tenemos 4 tarjetas, cada una de ellas contiene un número en un lado y otro número en el otro:

- un 1 y un 2
- un 3 y un 6
- un 9 y un 18
- un 27 y un 54

Elige una o más de estas tarjetas, ponlas encima de la mesa y mira cuánto suman en total los números que ves. ¿Cuáles son las tarjetas que tienes que poner encima de la mesa para obtener todos los números del 1 al 50? ¿Puedes continuar? ¿Hasta qué número?

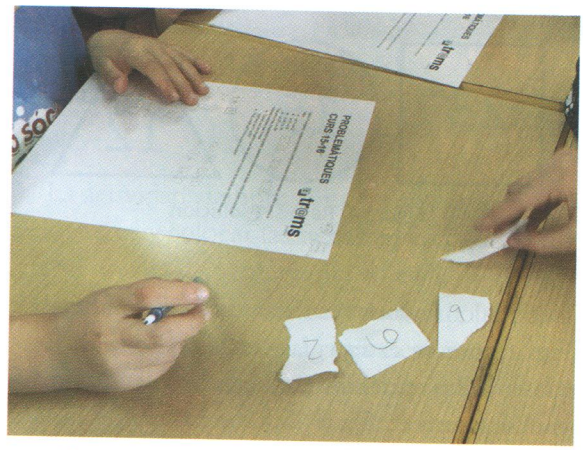

Figura 6. Imágenes del artículo de David Barba y Cecilia Calvo en el número 85 de *Suma*

Fue fácil demostrar que no necesitábamos ni el 4 (3 + 1) ni el 5 (3 + 2), ya que podíamos mostrar esos valores sobre la pizarra. Acordamos así que la cara 2 del segundo hexágono llevaría el número 6.

Llegaba ahora el turno de la pieza sucesiva. ¿Qué número íbamos a poner? El alumnado se alternaba en la pizarra para demostrar que su opción era la correcta y finalmente acordamos que necesitábamos un 9. ¿Y detrás?

Más rápido de lo que nos imaginábamos alguien propuso el 18, justificando su respuesta con el hecho de que en los casos anteriores el valor de la segunda cara era el doble del valor de la primera.

Un salto tan grande, de 9 a 18, encontró muchas objeciones, que fueron desapareciendo mientras sucesivas combinaciones de fichas aparecían en la pizarra (en gris los valores de los reversos de las fichas):

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | |
| ficha 3 | | | | | | | | | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 18 |
| VALOR | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | |
| ficha 3 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | | | | | | | | | | 9 |
| ficha 4 | | | | | | | | | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 |
| VALOR | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| ficha 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | | 1 | 2 | ? |
| ficha 2 | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | | | | 3 | 3 | 3 | 6 | 6 | 6 | ? |
| ficha 3 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | ? |
| ficha 4 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | 27 | ? |
| VALOR | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |

Figura 7. Composición de números con la *máquina de sumar*

A un ritmo distinto, todo el alumnado iba entendiendo el mecanismo y participando en la composición de los números sucesivos. Una creciente minoría intentaba anticipar el reto sucesivo y todos se extrañaban de lo rápido que se iban incrementando los valores en las caras de las fichas. Les parecía imposible que, con tan solo 4 fichas, se pudiera llegar a componer el número 80, de manera que el sucesivo hexágono llevaría los valores 81 y 162 en las dos caras, para llegar a componer el número 242.

Podría ser interesante expandir la actividad construyendo unas fichas como las del dominó triangular que se podrían montar, como engranajes, encima de una línea que haga de base.

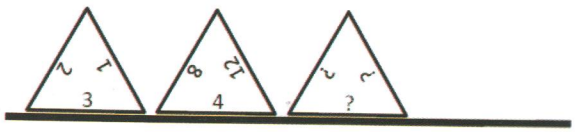


Figura 8. *Máquina de sumar* con *engranajes* triangulares

Se mantendría la idea de construir, una a una, las fichas con los estudiantes, anotando las combinaciones necesarias para formar los números sucesivos, las observaciones, las constantes, las relaciones…

No demasiado complicado resultaría pasar de las fichas triangulares a las cuadradas.

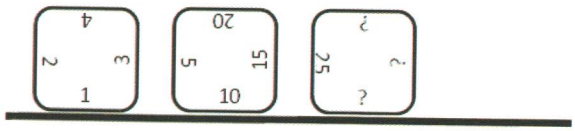


Figura 9. *Máquina de sumar* con *engranajes* cuadrados

Con el alumnado de los dos grupos de 4.ºde Primaria solo tratamos las primeras fichas, ya que lo que nos interesaba era comprobar si, después de esta actividad, más alumnado dominaría mejor y en menor tiempo las reglas del *Juego de las fichas*. Efectivamente, el experimento tuvo éxito. Nos queda la curiosidad de ver si la actividad con las fichas triangulares y cuadrada genera más competencias o si representa una innecesaria reiteración.

Trabajando con las fichas más simples no fue necesario hablar de potencias. Es muy posible que, trabajando con las fichas triangulares y cuadradas, o con el alumnado de la etapa sucesiva, este contenido emerja de sus observaciones de las regularidades que aparecen. Naturalmente, es la mejor manera de introducir un nuevo tema o verlo en un contexto de resolución de un reto.

Lo que sí hicimos fue una muy breve incursión en el mundo del sistema binario (básicamente: el *Juego de las sillas* y las *Tarjetas para adivinar*

*un número*, que también construimos —hasta el valor 15— para que se las llevaran y le propusieran la actividad a la familia o a otros compañeros del colegio).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 3 | 4 | 5 | 8 | 9 |
| 5 | 7 | 6 | 7 | 6 | 7 | 10 | 11 |
| 9 | 11 | 10 | 11 | 12 | 13 | 12 | 13 |
| 13 | 15 | 14 | 15 | 14 | 15 | 14 | 15 |

Figura 10. Las tarjetas para adivinar un número

## *Conclusiones*

El *Juego de las fichas*, muy fácil de construir y de presentar, está presente en las exposiciones permanente e itinerante y lo usamos también en las ferias matemáticas. Lo incluimos en la Maleta de Cálculo, como módulo para la *pop-up exhibition*. En la guía que acompaña la maleta, seguimos aconsejando que, si se quiere llevar este material a clase, o a un taller, cada alumno construya su reto, para que después circulen en el aula y así otros puedan resolverlos y construyan entre todos un repertorio compartido.

## Un juego competitivo con las Torres de Hanoi

Una de las cosas más sorprendentes de la aventura en el MMACA es descubrir nuevas facetas en materiales tan conocidos como, en este caso, las *Torres de Hanoi o de Brahama*.

Inventado por un matemático francés, Édouard Lucas en 1883, es un magnífico ejemplo de cómo una buena narración puede ayudar al éxito de un material. Si se le añade, como en este caso, una pizca de exotismo (los monjes del templo) y misterio algo morboso (el fin del mundo), la eternidad está a un paso.

Doy por conocidas la historia y el reto de un material del que existen distintas versiones (en todo caso, por si las moscas [12]). También el MMACA lo ha presentado en alguna exposición itinerante y lo ha utilizado en las ferias y en los talleres.

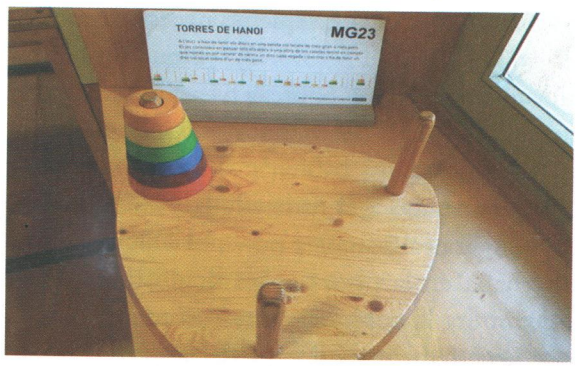


Figura 11. *Las Torres de Hanoi o de Brahama* (módulo MMACA)

Sus relaciones con los triángulos de Sierpinski y Pascal, la estructura del sistema binario o los Caminos de Hamilton [13], presentan un curioso paralelismo que puede estimular la fantasía y una investigación personal (siendo el enriquecimiento de los contenidos uno de los objetivos didácticos que nos proponemos conseguir).

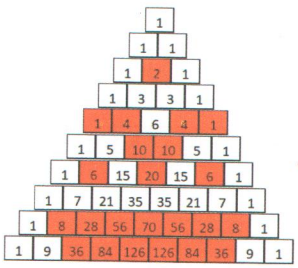


Figura 12. Triángulo de Pascal

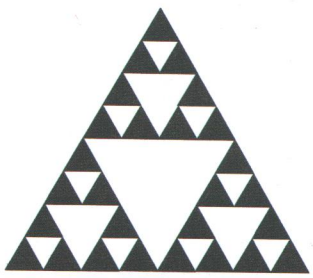

Figura 13. Triángulo de Sierpinski

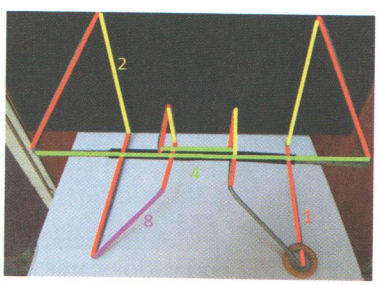


Figura 14. Camino de Hamilton sobre un hipercubo

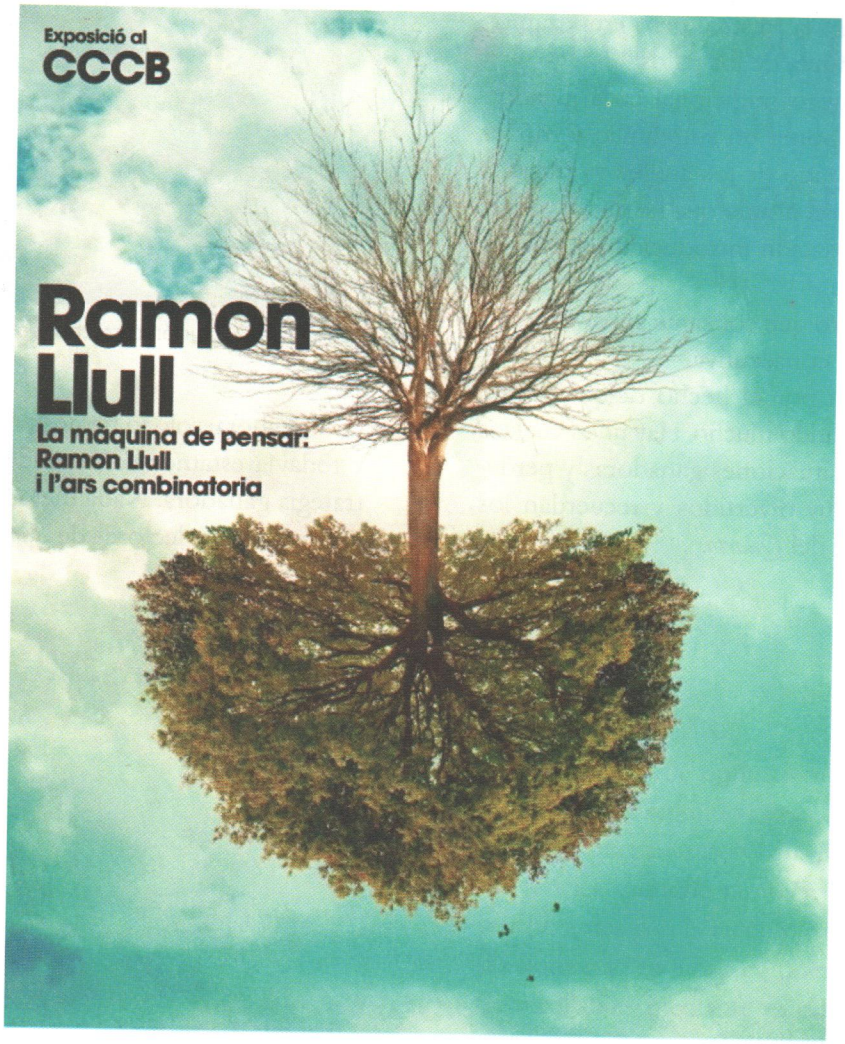


Figura 15. Póster de la exposición *Ramon Llull y el ars combinatoria*, en el CCCB (Centro de Cultura Contemporánea de Barcelona)



De hecho, incluimos estas actividades en el taller que acompañaba a la exposición *La máquina de pensar. Ramon Llull y el ars combinatoria*, en el CCCB, (14/07/16–11/12/16), y que se pudo ver durante las Jornadas C2EM[14].

Teniendo en cuenta todo lo anterior, sería normal considerar que no hay mucho más para investigar. Pero nada más lejos de la realidad.

De hecho, la actividad que os explicamos a continuación no tiene otros valores que ser sorprendente, divertida y provenir de la práctica cotidiana de un joven educador del MMACA. Para mantener el exotismo que acompaña desde su origen a este material, la hemos llamado *Las Torres de Ho Chi Mind*[15]. Es una actividad competitiva para dos jugadores.

Figura 16. Disposición de las piezas para empezar el juego

La estructura es la misma, pero empezamos con 6 o 7 anillos fuera de los palos.

Cómo en el juego tradicional cada jugador, por turnos, debe poner un solo anillo o mover de un palo a otro uno de los anillos ya puestos (cualquiera menos el último que ha puesto el adversario, única variación introducida para evitar entrar en un bucle).

Gana el primero que consigue apilar tres anillos de dimensión consecutiva.

Puede que sea por el hecho de ser nuevo, pero nos está gustando mucho. Hay unos vuelcos repentinos entre situaciones ganadoras y perdedoras que son muy divertidos y recuerdan los del *Nim Circular* o del *Quarto*.

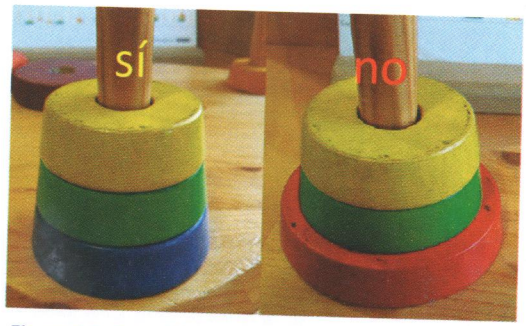

Figura 17. Solución correcta y equivocada del juego

Por ahora, solo lo hemos probado con amigos y todavía estamos discutiendo si existe una estrategia ganadora. Nada mejor que involucrar en la partida a los lectores de *Suma*.

MMACA
*Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)*
<contacte@mmaca.cat>



1 La educación informal contempla el aprendizaje *espontáneo* que se realiza en situaciones cuya finalidad no es la educativa (recreo, diversión...) y no van dirigidas a unos usuarios específicos.

2 UNESCO, 1998.

3 Como en otras de esas actividades, es sorprendente la rapidez con la que usuarios de toda edad se empoderan del material y empiezan a resolver los retos con extrema soltura.

4 En el primer artículo de esta sección explicamos que nos costó casi dos años transformar unas actividades pensadas para el aula al formato correcto para una exposición. En este caso, si con un módulo se puede hacer más de una actividad, se evita la necesidad del educador de pasar continuamente a deshacer los retos resueltos. La solución encontrada por el anterior usuario no es un obstáculo para el siguiente: solo se le pide escoger un reto diferente.

5 $1+2+2+5+6+8+9=33$; $2\times(1+2+2+5+6+8+9)=66$.

6 ¡Ay, qué suerte si los políticos y los economistas leyeran *Suma*!

7 https://twitter.com/paciencianostra?lang=ca.

8 A alguien no le habrá extrañado que en el momento de buscar un reto imposible hayamos asignado a las tres cajas un valor impar. Aun cuando 3 de las 7 fichas tienen un valor impar, el hecho de duplicar su valor en el momento de depositarlas en una caja de la misma forma, hace que a priori parezca más fácil que el valor de cada caja sea un número par. Hasta podríamos llegar a ponernos un nuevo reto: ¿Habrá una combinación imposible si las tres cajas suman un valor par?

9 Dejamos a algún experto en lógica resolver la duda si estamos delante de un problema NP-completo. (<https://es.wikipedia.org/wiki/NP-completo>). Por lo que compete al ámbito de nuestra propuesta, nos parece suficiente evidenciar cómo, detrás de un reto sencillo, accesible a todo tipo de usuario, se pueden investigar aspectos complejos de las matemáticas y que además tiene una enorme vigencia en el desarrollo tecnológico.

10 Siempre tendemos a estimular los aspectos colaborativos y comunicativos en todas las actividades.

11 Barba, D. y C. Calvo, «Tareas ricas para practicar sumas», *Suma* 85, julio 2017, págs.60-61.

12 https://es.wikipedia.org/wiki/Torres_de_Han%C3%B3i.

13 https://mth487.wordpress.com/2015/10/16/the-tower-of-hanoi/.

14 http://www.cccb.org/rcs_gene/DdP_la_maquina_de_pensar_LLULL_ES.pdf.

15 https://ca.wikipedia.org/wiki/Ho_Chi_Minh.